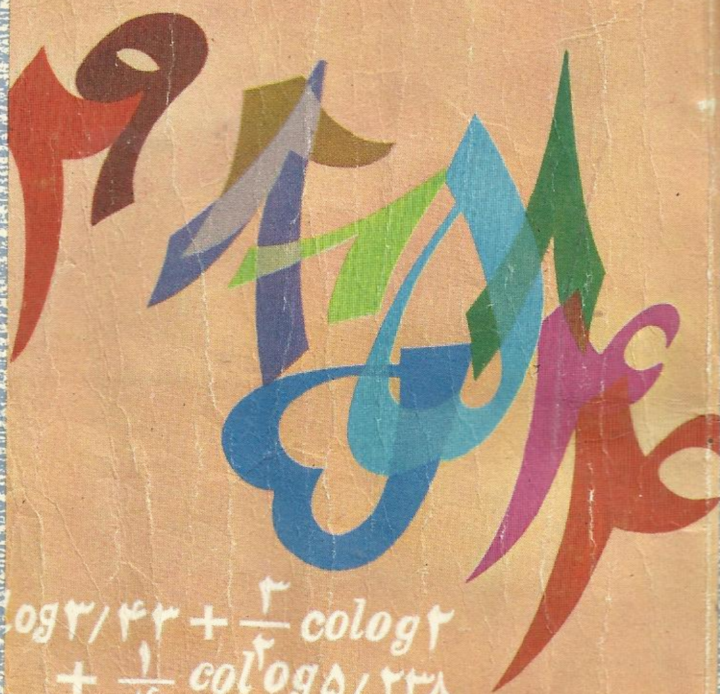


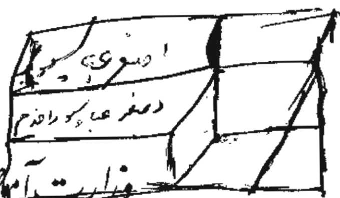
حساب

برای سال چهارم ریاضی

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

توانا بود هرکه دانا بود



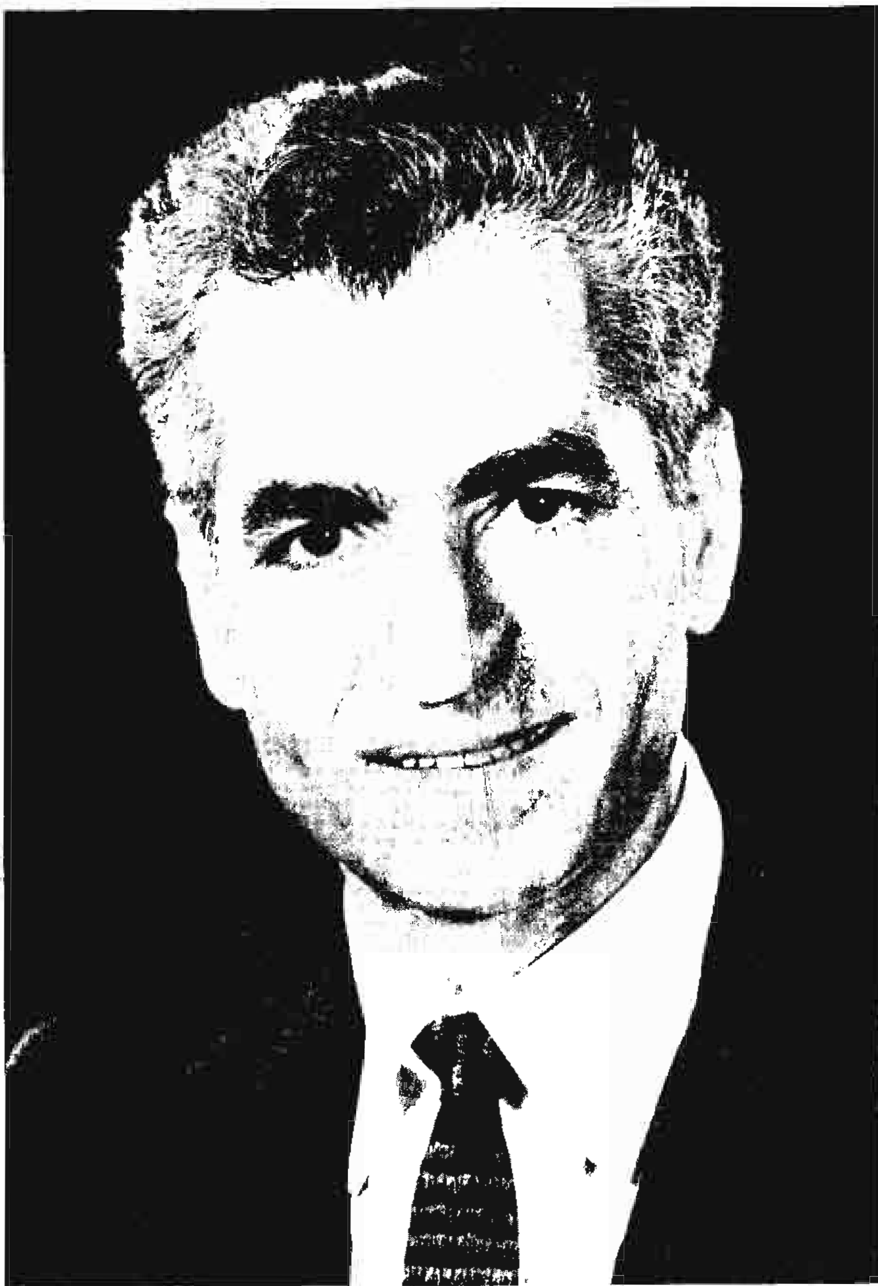
حساب

برای سال چهارم ریاضی

چاپ و توزیع از :



۱۳۴۶



این کتاب که به وسیلهٔ آقایان : موسی آذرنوش، احمد بیرشك، جهانگیر شمس آوری، عبدالغنی علیم مروستی، پروفسور تقی فاطمی، باقر نحوی، شادروان محسن هنربخش نگارش یافته ، برطبق مادهٔ ۴ تصویب نامهٔ شمارهٔ ۹۱۸ هیئت دولت مورخ ۱۸ر۱۲ر۴۱ و مادهٔ یك تصویب نامهٔ قانونی ۴۴۸۴ مصوب ۱۸ر۳ر۴۲ از طرف کمیسیونهای منتخب شورای عالی فرهنگ برای تدریس در دبیرستانها برگزیده شد و به موجب رأی شمارهٔ ۱۰۶۱ شورای عالی فرهنگ مورخ ۲۶ر۸ر۴۲ از نظر مطالب در سازمان کتابهای درسی ایران بررسی شد و درچاپخانهٔ پیروز بچاپ رسید .

نباید از نظر دورداشت که با وسعت دامنهٔ علوم در جهان امروز، هر اندازه کتب درسی جامع و کامل تهیّه شده باشد کافی برای تجهیز علمی جوانان نیست و دانش‌آموزان گرامی نباید مطالعات خود را به این کتب محدود سازند، بلکه باید با راهنمایی معلّمان خویش در ساعات فراغت به مطالعهٔ کتاب در کنار دروس خود بپردازند و اوقات عزیز خویش را برایگان از کف ندهند.

بر محقّقان و مؤلّفان کشور فرض است که در راه تهیّهٔ اینگونه کتابها بکوشند. بخصوص در این عصر مترقّی که به ارادهٔ شاهنشاه آریا مهر و در سایهٔ انقلاب ششم بهمن ماه ۱۳۴۱ و با اجرای طرح سپاه دانش، اهالی نقاط دورافتادهٔ مملکت نیز از نعمت سواد برخوردار گردیده و هر روز بر عدهٔ افراد کتابخوان کشور افزوده می‌شود فرصت را غنیمت شمرند و به تألیف کتابهایی مفید در رشته‌های مختلف علوم و فنون و ادب بپردازند و از این راه به پیشرفت فرهنگ و علوم و رشد اقتصادی کشور خدمتی ارزنده بنمایند.

وزیر آموزش و پرورش – دکتر هادی هدایتی

فهرست مندرجات

بنام خدا

فصل اول

لگاریتم

ازاینجا تا صفحه ۶ به ۹

۱ـ توان یك عدد ـ حاصل ضرب چند عدد مساوی، مثل $a \cdot a \cdot a$ را به‌صورت $a^۳$ می‌نویسند و می‌خوانند a به توان سه و حاصل $a^۳$ را توان سوم a می‌نامند. مثلاً ۱۲۵ توان سوم ۵ و ۳۶ توان دوم ۶ است، زیرا

$$۱۲۵=۵\times۵\times۵=۵^۳ \quad و \quad ۳۶=۶\times۶=۶^۲$$

۲ـ توان صفر یك عدد ـ می‌دانید که خارج قسمت دو مقدار متساوی برابر است با یك، یعنی :

$$a^۲ : a^۲=۱ \quad و \quad ۲^۳ : ۲^۳=۱$$

وبطورکلی $a^m : a^m=۱$

اما طبق قاعدهٔ تقسیم توانها می‌توانیم بنویسیم :

$$a^۲:a^۲=a^{۲-۲}=a^۰$$
$$۲^۳:۲^۳=۲^{۳-۳}=۲^۰$$
$$a^m:a^m=a^{m-m}=a^۰$$

از آنچه‌گفته شد می‌توان تعریف زیر را نتیجه گرفت :

$$\boxed{a^۰=۱}$$

یعنی توان صفر هرعدد (جزصفر) مساوی یك است .

$$(-۴)^۰=۱ \quad و \quad (۱۰)^۰=۱ \quad و \quad \left(\frac{۲}{۳}\right)^۰=۱$$

۳- **توان منفی یك عدد** ـ خارج قسمت 5^4 بر 5^6 از یك طرف چنین تعیین می‌شود :

$$5^4:5^6=\frac{5^4}{5^6}=\frac{5\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5\times5\times5}=\frac{1}{5\times5}=\frac{1}{5^2}$$

و از طرف دیگر طبق قاعدهٔ تقسیم دو قوه داریم :

$$\frac{5^4}{5^6}=5^{4-6}=5^{-2}$$ (بخوانید ۵ به توان منهای ۲)

بنابراین نتیجه می‌گیریم که :

$$5^{-2}=\frac{1}{5^2}$$

و می‌توان تعریف توان منفی را چنین کرد:

هر عدد با نمایندهٔ منفی برابر کسری است که صورتش ۱ و مخرجش همان‌عدد بانمایندهٔ مثبت‌باشد. یعنی بطورکلی :

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

۴- **ریشهٔ یك عدد** ـ گفتیم که در $5^3=125$ ، عدد ۱۲۵ را توان سوم ۵ می‌گویند . حالا باید بدانید که عدد ۵ را ریشهٔ سوم ۱۲۵ می‌گویند وآن را به این شکل می‌نویسند :

$$5=\sqrt[3]{125}$$

بطورکلی ریشهٔ m ام A عددی است مانند a که چون آن را به قوهٔ m برسانیم مساوی A شود .

$$\sqrt[m]{A}=a$$

$$A=a^m$$

ریشهٔ m ام A یعنی $\sqrt[m]{A}$ را به صورت $A^{\frac{1}{m}}$ (A به‌توان یك m ام) هم می‌نویسند . بطورکلی :

هر ریشه را می‌توان به صورت توانی نوشت که پایه‌اش پایهٔ عدد زیر رادیکال ونمای آن کسری باشدکه مخرجش مساوی شمارهٔ ریشه وصورت آن مساوی نمای عدد زیر رادیکال باشد.

بنابراین برطبق قرار داد :

$$\sqrt[3]{5^4}=5^{\frac{4}{3}}$$

و بطورکلی

$$\sqrt[q]{A^p}=A^{\frac{p}{q}}$$

۵- از آنچه راجع به توانهای یك عدد آموخته‌اید می‌توانید بسهولت درك کنید که اگر در عدد 10^a ، a (یعنی توان) رفته رفته بزرگ شود ، 10^a نیز متدرجاً بزرگ می‌شود و بالعکس اگر a کوچك شود ، عدد 10^a متدرجاً کوچك می‌گردد .

مثلاً $10^3>10^2>10^{1/75}>10^{1/5}>10$

زیرا $10^2=100$ و $10^3=1000$

$$10^{1/75}=(10)^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{10^7}=\sqrt{\sqrt{10^7}}=56/24$$

$$10^{1/5}=10^{\frac{3}{2}}=\sqrt{10^3}=31/62$$

واضح است که عدد ۳۱/۶۲ را می‌توان به صورت $10^{1/5}$ نوشت .

وچون $10^{1/5}=31/62$ بین 10^1 و 10^2 قرار دارد ، یعنی :

$$10^1<31/62=10^{1/5}<10^2$$

هرعدد واقع بین ۱۰ و ۱۰۰ رامی‌توان به‌شکل توانی از ۱۰ نوشت که‌نمای آن بین ۱ و ۲ باشد .

نتیجه ـ از آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که هر عدد مثبت را می‌توان به شکل توانی از ۱۰ نوشت .

۶ ـ تعریف ـ اگرعددی مثبت، مانند N را به شکل توانی از ۱۰ یعنی به‌شکل 10^x بنویسیم عدد x یعنی نمای پایهٔ ۱۰ را ، **لگاریتم** اعشاری عدد N می‌گویند .

اگر $N = 10^x$ باشد، x لگاریتم عدد N در پایهٔ ۱۰ است که به این شکل نمایش می‌دهند :

$$\log N = x$$

ومی‌خوانند ، لگاریتم N مساوی است با x .

از هریك از برابریهای $N = 10^x$ و $\log N = x$ می‌توان دیگری را نتیجه‌گرفت . این مطلب را می‌توان چنین نمایش داد :

$$\log N = x \rightleftarrows N = 10^x$$

دقت‌کنید! چون کلیهٔ توانهای ۱۰ مثبت می‌باشند ، اعداد منفی، لگاریتم ندارند .

۷ـ لگاریتم توانهای صحیح ۱۰ ـ می‌دانید که اعداد ۱ ، ۱۰ ، ۱۰۰ ، ۱۰۰۰ و.... را می‌توان به‌صورت توان صحیح ۱۰ وهمچنین اعداد ۰/۱، ۰/۰۱، ۰/۰۰۱ و....رابه صورت توان صحیح و منفی ۱۰ نوشت. بنابراین می‌توان لگاریتم آنها را تعیین کرد . مثلاً :

$\log 1 = 0$ چون می‌توان نوشت: $1 = 10^0$

و $\log 10 = 1$ » » » $10 = 10^1$

و $\log 100 = 2$ » » » $100 = 10^2$

و $\log 1000 = 3$ » » » $1000 = 10^3$

و $\log 0/1 = -1$ » » » $0/1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

و $\log 0/01 = -2$ چون می‌توان نوشت: $0/01 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

و $\log 0/001 = -3$ » » » $0/001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

و $\log 0/0001 = -4$ » » » $0/0001 = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

بنابراین لگاریتم عددهایی مانند ۱۰ ، ۱۰۰ ، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و .... عددی است صحیح و مثبت‌که مقدارش برابر با تعداد صفرهای آن عدد است و لگاریتم هریك از عددهای اعشاری ۰/۱ ، ۰/۰۱ ، ۰/۰۰۱ و .... عددی است صحیح و منفی کـه قدر مطلق آن برابر با تعداد صفر های سمت چپ عدد است. (با منظور داشتن صفری‌که قبل از ممیز است) .

۸ ـ لگاریتم یك عدد ـ اگرعدد N برابر یکی از قوای صحیح ۱۰ نباشد ناچار بین دوتوان متوالی ۱۰ واقع است . پس لگاریتم آن نیز بین دو عدد صحیح واقع می‌شود . بنابراین می‌توان گفت که بطور کلی $\log N$ دارای یك قسمت صحیح و یك قسمت کوچکتراز واحداست که می‌توان مقدار تقریبی آن را به‌صورت اعشاری نوشت .

مثلاً عدد ۵۷۳ بین ۱۰۰ یعنی (10^2) و ۱۰۰۰ یعنی (10^3)واقع است . پس :

$$2 < \log 573 < 3$$

یعنی می‌توان گفت که لگاریتم ۵۷۳ برابر است با مجموع عدد صحیح ۲ ویك عددکوچکتر از واحد (اعشاری). یعنی :

$$\log 573 = 2 + 0/\ldots\ldots$$

همچنین‌چون $0/1 = 10^{-1} < 0/573 < 1$ ، $-1 < \log 0/573 < 0$

یعنی $\log ۰/۵۷۳$ عددی است منفی و بزرگتر از (۱−) . این عدد برابر است با مجموع (۱−) ویك عدد مثبت کوچکتر از ۱ .

$$\log ۰/۵۷۳ = -۱ + ۰/.......$$

همچنین چون : $\frac{۱}{۱۰^{۳}} < ۰/۰۰۵۷۳ < \frac{۱}{۱۰^{۲}}$

یا $۱۰^{-۳} < ۰/۰۰۵۷۳ < ۱۰^{-۲}$

داریم : $-۳ < \log ۰/۰۰۵۷۳ < -۲$

یعنی $\log ۰/۰۰۵۷۳$ ، عددی است منفی برابر بامجموع ۳− ویك عدد مثبت کوچکتر از ۱ :

$$\log ۰/۰۰۵۷۳ = -۳ + ۰/.....$$

خواهیم دیدکه (از روی جدول لگاریتم) جزء اعشاری لگاریتم برابر ۰/۷۵۸۱۵ است یعنی : $\log ۰/۰۰۵۷۳ = -۳ + ۰/۷۵۸۱۵$

برای سهولت محاسبه قرار براین شده است که لگاریتمهایی‌راکه شامل دوقسمت منفی و مثبت است بههمان صورت جبری باقی گذارند و چنین بنویسند :

$$-۳ + ۰/۷۵۸۱۵ = \bar{۳}/۷۵۸۱۵$$

جزء صحیح لگاریتم هرعدد را **مفسّر** وجزء اعشاری‌آن‌را **مانتیس** می‌نامند . جزء اعشاری (مانتیس) همیشه مثبت و جزء صحیح (مفسر) ممکن است مثبت ، منفی یا صفر باشد .

۹ـ قضیه ـ اگرعددی را در قوای صحیح ۱۰ ضرب یا برآن تقسیم کنیم درمانتیس لگاریتم تغییری رخ نمی‌دهد .

مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم‌که اگر A را در ۱۰^{n} (n عددی است صحیح، مثبت یا منفی) ضرب‌کنیم مانتیس لگاریتم تغییر نمی‌کند .

به فرض آنکه $\log A = x$ باشد ، داریم : $A = ۱۰^{x}$. بنابراین :

$$\log(A \times ۱۰^{n}) = \log(۱۰^{x} \times ۱۰^{n}) = \log ۱۰^{x+n} = x+n$$

چون n عددی است صحیح پس قسمت اعشاری $x+n$ یعنی مانتیس لگاریتم $A \times ۱۰^{n}$ با قسمت اعشاری x یعنی مانتیس لگاریتم A یکی است .

مثلاً قسمت اعشاری لگاریتم اعداد ۵۷۳ ، ۵۷۳۰۰ و ۰/۵۷۳ و ۵۷/۳ یکی است . پس وقتی که دانستیم مانتیس لگاریتم ۵۷۳ برابر ۰/۷۵۸۱۵ است می‌فهمیم که مانتیس لگاریتم هریك از اعداد دیگرنیز همین ۰/۷۵۸۱۵ است. بعکس برای تعیین قسمت‌اعشاری لگاریتم اعداد ۵۷/۳ و ۰/۵۷۳ و ۵۷۳۰۰ کافی‌است مانتیس لگاریتم ۵۷۳ را بدست آوریم (یعنی از ممیزهای ۵۷/۳ ، ۰/۵۷۳ و از صفرهای سمت راست ۵۷۳۰۰ صرف نظرکنیم).

محاسبهٔ لگاریتم یك عدد

۱۰ـ تعیین مفسر یا جزء صحیح لگاریتم یك عدد ـ از آنچه گفته شد معلوم می‌شودکه :

اگرعددی بزرگتراز یك باشد مفسر لگاریتم‌آن یك واحدکمتراز عدهٔ ارقام صحیح آن عدد است :

مثلاً مفسر لگاریتم ۴۵۳/۷۵ برابر۲ ومفسر لگاریتم ۴۵/۳۷۵ برابر ۱ است ، زیرا :

$$۱۰^{۲} < ۴۵۳/۷۵ < ۱۰^{۳}$$
$$۱۰^{۱} < ۴۵/۳۷۵ < ۱۰^{۲}$$

اگر عدد کوچکتر از یك و به صورت اعشاری نوشته شده باشد مفسر

لگاریتم آن عددی است منفی که قدرمطلق آن مساوی عدهٔ صفرهایی است که در سمت چپ اولین رقم آن عدد است .

(با منظورکردن صفر سمت چپ ممیز)

مثلاً مفسر لگاریتم عدد ۰/۰۵۷۶۱ برابر ۲− و مفسر لگاریتم عدد ۰/۴۵۷ برابر ۱− است زیرا :

$$۱۰^{-۲} < ۰/۰۵۷۶۱ < ۱۰^{-۱}$$
$$۱۰^{-۱} < ۰/۴۵۷ < ۱۰^{۰}$$

۱۱ـ تعیین مانتیس یا جزء اعشاری لگاریتم اعداد ـ جدول لگاریتم ـ جدولهایی به‌نام جدولهای لگاریتم موجوداست که در آن جزء اعشاری لگاریتم اعداد را با تقریب معین حساب کرده و نوشته‌اند . با دانستن طریقهٔ بکار بردن این جدولها می‌توان مانتیس لگاریتم هرعدد را بدست آورد .

توجه کنید! دربعضی از جدولهای لگاریتم، جزء اعشاری لگاریتم تا کمتر از ۰/۰۰۰۱ تقریب ، یعنی با چهار رقم اعشار و دربعضی دیگر تاکمتراز ۰/۰۰۰۰۱ تقریب ، یعنی با پنج رقم اعشار نوشته شده است.

چون در هرجدول طرز بکار بردن آن بتفصیل ذکر می‌شود ما در اینجا باختصار طریقهٔ استفادهٔ از یك جدول چهار رقمی را ، که در صفحات آخرکتاب آمده است شرح می‌دهیم :

چون دراین جدول فقط جزء اعشاری لگاریتم همهٔ اعداد سه‌رقمی نوشته شده است ، برای پیدا کردن جزء اعشاری لگاریتم یك عدد قبلاً ، در صورت لزوم ، با جابجاکردن ممیز یا حذف نمودن یا اضافه‌کردن صفر، عدد را به یك عدد صحیح سه رقمی یا یك عدد اعشاری که جزء صحیح

آن سه رقمی باشد تبدیل می‌کنیم (شمارهٔ ۹) . پس دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اول ـ عدد مفروض صحیح وسه‌رقمی است ، مانند ۳۴۵ . عدد دو رقمی سمت چپ این عدد یعنی ۳۴ را در ستون اول (ستونی که بالای آن N نوشته شده است) و ۵ (رقم آحاد) آن را درسطراول جدول پیدامی‌کنیم. مانتیس لگاریتم ۳۴۵ عدد ۵۳۷۸ است که با ۳۴ دریك سطر و با ۵ در یك ستون است .

حالت دوم ـ عدد اعشاری است وجزء صحیح آن دارای سه رقم است ، مانند ۷۳۴/۶ و ۵۰۲/۸۱

۱ـ چون ۷۳۴ < ۷۳۴/۶ < ۷۳۵ ، پس جزء اعشاری لگاریتم ۷۳۴/۶ ازجزء اعشاری لگاریتم ۷۳۴ بزرگتر وازجزء اعشاری لگاریتم ۷۳۵ کوچکتر است .

جزء اعشاری لگاریتم ۷۳۴ برابر ۸۶۵۷ (ده هزارم)
و « « « ۷۳۵ « ۸۶۶۳ (ده هزارم)

است که اختلاف آنها برابر ۶ (ده هزارم) است .

اگر فرض کنیم که افزایش لگاریتم تقریباً متناسب با افزایش عدد است ، می‌گوییم هرگاه بر ۷۳۴ یك واحد افزوده شود بر لگاریتم آن ۶ (ده هزارم) افزوده می‌شود. پس اگر بر۷۳۴ ، شش دهم افزوده شود برلگاریتم آن (۳/۶ = ۶ × ۰/۶) ده هزارم یا تقریباً ۴ ده هزارم افزوده خواهد شد. بنابراین مانتیس لگاریتم ۷۳۴/۶ برابراست با (۸۶۵۷+۴) ده هزارم یا ۰/۸۶۶۱ ، ازاین رو باتوجه بداینکه مفسر لگاریتم این‌عدد ۲ است خواهیم داشت :

$$\log ۷۳۴/۶ = ۲/۸۶۶۱$$

وهمینطور : log۷/۳۴۶=۰/۸۶۶۱

درطرف راست هرصفحه درستونی‌که بالای‌آن D نوشته شده‌است اختلاف مانتیسهای دوعدد متوالی سه رقمی وجود دارد، بنابراین ، پیدا کردن جزء اعشاری‌لگاریتم ۷۳۵ و پیداکردن تفاوت‌آن باجزء اعشاری لگاریتم ۷۳۴ لازم نیست زیرا این اختلاف را در ستون مزبور می‌توان یافت .

۴ـ چون ۵۰۳>۵۰۲/۸۱>۵۰۲ ، log۵۰۲/۸۱ بین log۵۰۲ و log۵۰۳ است .

جزء اعشاری لگاریتم ۵۰۲ برابراست با ۷۰۰۷ ده هزارم

و « « ۵۰۳ برابراست با ۷۰۱۶ ده هزارم

اختلاف این اجزاء اعشاری می‌شود : ۹ ده هزارم

که می‌توان نوشت :

افزایش	اختلاف	
۱	۹ ده هزارم	
۰/۸۱	x	x=۷/۲۹#۷ ده هزارم

پس جزء اعشاری لگاریتم ۵۰۲/۸۱ برابر مجموع ۷۰۰۷ ده هزارم و ۷ ده هزارم یعنی برابر۷۰۱۴ ده هزارم می‌باشد و داریم .

log۵۰۲/۸۱=۲/۷۰۱۴

log۰/۰۵۰۲۸۱=۲̄/۷۰۱۴

عمل فوق را بطورخلاصه معمولاً چنین می‌نویسیم :

۵۰۲	۷۰۰۷
۰/۸۱	۷ D=۹

log۵۰۲/۸۱=۲/۷۰۱۴

دقت‌کنید! چون درجدول ، جزء اعشاری هرلگاریتم ، چهار-

رقمی است ، ما نیز در ضمن محاسبه بیش از چهار رقم بعد از ممیز را بکار نمی‌بریم، مثلاً درتعیین قسمت اعشاری لگاریتم ۷۳۴/۶ دیدیدکه اختلاف مربوط به ۰/۶ ، برابر ۳/۶ ده هزارم یا ۰/۰۰۰۳۶ بود و چون پنجمین رقم بعدازممیزاز ۵ بیشتربود به جای‌آن یك واحد به رقم چهارم بعدازممیزاضافه‌کردیم ، یعنی ۳/۶ ده هزارم را برابر۴ ده‌هزارم گرفتیم . درتعیین قسمت اعشاری لگاریتم ۵۰۲/۸۱ نیز اختلاف برابر ۷/۲۹ ده هزارم یا ۰/۰۰۰۷۲۹ بود وچون پنجمین رقم‌از ۵کمتربود از رقم پنجم و رقمهای مراتب پایین‌تراز آن صرف‌نظرکردیم وآن را برابر ۷ ده هزارم اختیارکردیم .

اگر در یك محاسبه رقم پنجم بعد از ممیز ۵ شود آن را حذف می‌کنیم و یك واحد به رقم چهارم بعد از ممیزعلاوه می‌کنیم.

۱۲ـ تعیین عددی‌که لگاریتمش معلوم است.

حالت اول ـ جزء اعشاری (مانتیس) لگاریتم را عیناً درجدول می‌شود پیدا کرد .

مثلاً اگر لگاریتم مفروض ۱̄/۸۸۸۷ باشد ، می‌بینیم که مانتیس یعنی ۸۸۸۷ عیناً در جدول وجود دارد . و در سطری است که جلو آن عدد ۷۷ از ستون N و در ستونی است که بالای آن ۴ می‌باشد ، پس عدد صحیح سه رقمی که مانتیس لگاریتمش ۸۸۸۷ باشد ، عدد ۷۷۴ است. اما مفسر لگاریتم مفروض ۱ـ است. پس‌عدد مطلوب ۰/۷۷۴ است.

۱̄/۸۸۸۷=log۰/۷۷۴

حالت دوم ـ مانتیس لگاریتم مفروض عیناً در جدول یافت نمی‌شود . مثلاً اگر بخواهیم عددی را که لگاریتمش برابر ۴/۶۵۹۵ است پیداکنیم می‌بینیم‌که جزء اعشاری لگاریتم یعنی ۶۵۹۵ در جدول

نیست ولی می‌توان درجدول دومانتیس متوالی ۶۵۹۰ و ۶۵۹۹ را بدست آوردکه مانتیس مفروض مابین آنهاست :

۶۵۹۰	برابرمانتیس لگاریتم عدد	۴۵۶
۶۵۹۹	» » » عدد	۴۵۷

چون ۹ = ۶۵۹۰ − ۶۵۹۹ = D و ۵ = ۶۵۹۰ − ۶۵۹۵ ،

گوییم هرگاه برجزء اعشاری لگاریتم ، ۹ ده‌هزارم افزوده شود برعدد، یك افزوده می‌شود ، پس‌اگر برجزء اعشاری لگاریتم ۵ ده‌هزارم‌افزوده شود ، برعدد ۰/۵۵ ≠ ۵/۹ یا تقریباً ۰/۶ افزوده خواهد شد . یعنی ۶۵۹۵ برابرجزء اعشاری لگاریتم ۴۵۶/۶ است ، و از آنجا :

۴/۶۵۹۵ = log۴۵۶۶۰

صورت عمل را چنین می‌نویسیم :

۴۵۶	۶۵۹۰	D=۹
۰/۶	۵	

۴/۶۵۹۵ = log۴۵۶۶۰

۱۳ـ **تعریف** ـ عدد ۰/۷۷۴ را عدد مابازای ۱̄/۸۸۸۷ (آنتی لگاریتم Antilogarithme) و ۴۵۶۶۰ را عدد مابازای ۴/۶۵۹۵ می‌نامیم .

تمرین

۱ـ لگاریتم اعداد زیررا که به شکل توان ۱۰ نوشته شده بنویسید :

۱۰۰ = $۱۰^{۲}$ ‏ ‏ ‏ ۰/۰۰۰۰۱ = $۱۰^{-۵}$

۵۱ = $۱۰^{۱/۷۰۷۶}$ ‏ ‏ ‏ ۲۶۹ = $۱۰^{۲/۴۲۹۷}$

$\sqrt{۱۰}$ = $۱۰^{۰/۵}$ ‏ ‏ ‏ $\sqrt[۴]{۱۰^{۳}}$ = $۱۰^{۰/۷۵}$

۲ـ تساویهای لگاریتمی زیررا به تساویهایی ازتوان ۱۰ تبدیل کنید:

log۲۹۰ = ۲/۴۶۲۴ ‏ ‏ ‏ log۰/۰۱ = −۲

log۷ = ۰/۸۴۵۱ ‏ ‏ ‏ log۸ = ۰/۹۰۳۱

log۹۹۹ = ۲/۹۹۹۶ ‏ ‏ ‏ log۷۰۰ = ۲/۸۴۵۱

۳ ـ به جای علامت ؟ عدد مناسب بگذارید :

log؟ = ۳ ‏ ‏ ‏ log؟ = −۳

log؟ = ۱/۲

۴ ـ معلوم‌کنید لگاریتمهای اعداد زیر بین کدام دو عدد متوالی صحیح هستند :

log۶۷۸ ‏ ‏ ‏ log۵۴/۶

log۹/۰۸ ‏ ‏ ‏ log۰/۸۷

log۰/۰۸۷ ‏ ‏ ‏ log۰/۰۰۸۷

۵ ـ مفسر لگاریتمهای عددهای زیر را بنویسید :

۸۷۱۲ ‏ ‏ ‏ ۹۰۱ ‏ ‏ ‏ ۷/۹

۶ ـ لگاریتم اعداد زیر را بدست آورید :

۰/۴ ، ۰/۵۶۴ ، ۳/۵۷ ، ۲۵۶ ، ۴۹۷۶ ، ۳/۲۱۴ ، ۴۵۶۷ ، ۲/۷ ، ۱۰۰۱ ، ۴۷۹۰۰ ، ۲۱۱۱ ، ۵۲۷۸ ، ۲/۳۴ ، ۰/۰۰۰۴۵۷

[illegible] عدد ما بازای (Antilogarithme) هریك‌ازلگاریتمهای زیر را بنویسید :

۲/۳۱۳۳ ، ۰/۳۰۱۰ ، ۳/۰۵۴ ، ۰/۵۶۷۸

۵/۴۰۳۱ ، ۱/۷۴۳۶ ، ۱̄/۹۹۶ ، ۳/۳۹۹۹۸

۱/۰۱۰۲ ، ۲/۹۰۲۷ ، ۱/۹۰۱۳ ، ۳̄/۴۱۲۸

☆☆☆

قضایای مربوط به لگاریتم

۱۴ ـ **لگاریتم حاصل ضرب دویا چند عدد مثبت برابراست با مجموع لگاریتمهای آنها** ـ اگر از روی جدول لگاریتم ، مثلاً لگاریتم اعداد ۲ ، ۳ و ۶ را پیدا کنید ، خواهید دیدکه مجموع لگاریتمهای ۲ و ۳ برابر لگاریتم ۶=۳×۲ است .

$\log ۲ + \log ۳ = ۰/۳۰۱۰ + ۰/۴۷۷۱ = ۰/۷۷۸۱$

$\log(۲ \times ۳) = \log ۶ = ۰/۷۷۸۱$

بنابراین : $\log(۲ \times ۳) = \log ۲ + \log ۳$

مطلب فوق را به طریق زیر استدلال می‌کنیم :

اگر $\log P = z$ ، $\log N = y$ و $\log M = x$ باشد ، داریم :

$$M = ۱۰^x \text{ و } N = ۱۰^y \text{ و } P = ۱۰^z$$

و $$M.N.P = ۱۰^x \times ۱۰^y \times ۱۰^z = ۱۰^{x+y+z}$$

پس $$\log(M.N.P) = x+y+z = \log M + \log N + \log P$$

$$\boxed{\log(M.N.P) = \log M + \log N + \log P}$$

۱۵ ـ لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت برابر است با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه. یعنی :

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

زیرا اگر داشته باشیم :

$$\log M = x \text{ و } \log N = y$$

داریم : $$M = ۱۰^x \text{ و } N = ۱۰^y$$

و از آنجا : $$\frac{M}{N} = \frac{۱۰^x}{۱۰^y} = ۱۰^{x-y}$$

پس : $$\log \frac{M}{N} = x - y = \log M - \log N$$

$$\boxed{\log \frac{M}{N} = \log M - \log N}$$

مثلاً : $\log \frac{۸}{۳} = \log ۸ - \log ۳ = ۰/۹۰۳۱ - ۰/۴۷۷۱ = ۰/۴۲۶۰$

درحالت مخصوص که مقسوم برابر ۱ است خواهیم داشت :

$$\log \frac{۱}{N} = \log ۱ - \log N = ۰ - \log N = -\log N$$

و از آنجا : $$\log \frac{۱}{N} = -\log N$$

مثلا : $$\log \frac{۱}{۶} = -\log ۶ = -۰/۷۷۸۱$$

چون در محاسبات بهتر است مانتیس لگاریتم اعداد مثبت باشد از این جهت $-\log ۶$ را چنین می‌نویسیم :

$$-\log ۶ = -۰/۷۷۸۱ + ۱ - ۱ = -۱ + ۰/۲۲۱۹ = \bar{۱}/۲۲۱۹$$

$\bar{۱}/۲۲۱۹$ راکه برابر $-\log ۶$ است $\text{colog}\,۶$ (کلگاریتم) می‌گویند.

بطورکلی : **منهای لگاریتم هرعدد را کلگاریتم آن عدد می‌نامند.**

$$\boxed{\log \frac{۱}{N} = -\log N = \text{colog}\,N}$$

نتیجه ــ لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت مساوی است با مجموع لگاریتم مقسوم وکلگاریتم مقسوم علیه . یعنی :

$$\boxed{\log \frac{M}{N} = \log M + \text{colog}\,N}$$

۱۶ ـ لگاریتم قوهٔ m ام هر عدد مثبت مساوی است با m برابر لگاریتم همان عدد . یعنی :

$$\boxed{\log A^m = m \log A}$$

زیرا اگر داشته باشیم : $\log A = x$ یا $A = ۱۰^x$

داریم : $$A^m = ۱۰^{mx}$$

و از آنجا : $\log A^{m} = \log ۱۰^{mx} = mx = m\log A$

مثلاً : $\log ۲^{۳} = ۳\log ۲ = ۳ \times ۰/۳۰۱۰ = ۰/۹۰۳۰$

نتیجه – چون $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{۱}{n}}$ ، بنابراین :

$$\log \sqrt[n]{A} = \log A^{\frac{۱}{n}} = \frac{۱}{n}\log A$$

یعنی : **لگاریتم ریشهٔ n ام یك عدد مساوی است با $\frac{۱}{n}$ لگاریتم آن عدد.**

☆☆☆

اعمال مربوط به لگاریتم

در محاسبه‌های لگاریتمی ، که بعداً خواهید دید ، اغلب اتفاق می‌افتد که بخواهیم چند لگاریتم را با هم جمع کنیم . یا یك لگاریتم را درعددی ضرب یا برعددی تقسیم کنیم . یاکلگاریتم یك عدد را از روی لگاریتم آن تعیین کنیم . راه انجام دادن این اعمال چنین است :

۱۷ – برای جمع کردن لگاریتمها ، قسمتهای اعشاری آنها را که مثبت است جمع می‌کنیم و واحدهای صحیح حاصل را (اگر وجود داشته باشد) برمجموع جبری مفسرها می‌افزاییم .

مثلاً اگر لگاریتم سه عدد بترتیب ۱/۴۵۴۲ ، ۲/۵۲۳۷ و $\bar{۴}$/۷۳۹۱ باشد . مجموع آنها چنین بدست می‌آید :

$$\begin{array}{r} ۱/۴۵۴۲+ \\ ۲/۵۲۳۷ \\ \bar{۴}/۷۳۹۱ \\ \hline ۰/۷۱۷۰ \end{array}$$

۱۸ – چنانکه می‌دانیم کلگاریتم هرعددمانند N مساوی $-\log N$ است ، مثلاً اگرداشته باشیم $\log N = \bar{۳}/۷۳۱۸$ ، داریم :

$$\text{colog}\, N = -\log N = -(\bar{۳}/۷۳۱۸)$$

چون درمحاسبه‌ها ، همانطور که گفتیم ، باید قسمت مانتیس را مثبت بنویسیم ، $\text{colog}\, N$ را می‌نویسیم :

$$\text{colog}\, N = -(\bar{۳}/۷۳۱۸) = -(-۳+۰/۷۳۱۸) = ۳-۰/۷۳۱۸ = ۲/۲۶۸۲$$

به همین ترتیب اگر داشته باشیم : $\log P = ۲/۱۷۳۶$

داریم : $\text{colog}\, P = -۲/۱۷۳۶ = -۲-۰/۱۷۳۶ = -۲-۱+۱-۰/۱۷۳۶ = -۳+۰/۸۲۶۴ = \bar{۳}/۸۲۶۴$

از دو مثال فوق قاعدهٔ زیر برای تعیین کلگاریتم یك عدد ، از روی لگاریتم آن بدست می‌آید :

برای نوشتن کلگاریتم یك عدد ، اولین رقم بامعنای سمت راست قسمت اعشاری لگاریتم آن را از ۱۰ و رقمهای سمت چپ آن را از ۹ کم می‌کنیم تا قسمت اعشاری کلگاریتم بدست آید ، سپس مفسر لگاریتم را با ۱ جمع می‌کنیم و آن را تغییر علامت می‌دهیم تا مفسر کلگاریتم بدست آید .

(امتحان درستی عمل آن است که مجموع کلگاریتم و لگاریتم صفر باشد) . بدین ترتیب :

اگر $\log x = ۱/۱۰۸۲$ باشد ، $\text{colog}\, x = ۰/۸۹۱۸$

و اگر $\log y = ۰/۸۰۸۰$ باشد ، $\text{colog}\, y = \bar{۱}/۱۹۲۰$

۱۹ – برای ضرب کردن یك عدد صحیح در لگاریتم یك عدد ، آن عدد صحیح را درقسمت اعشاری لگاریتم ضرب می‌کنیم و واحدهای

صحیح حاصل ضرب را (اگر وجود داشته باشد) برحاصل ضرب آن عدد صحیح در **مفسر** می‌افزاییم : $۷\times\bar{۱}٫۸۳۴۶=\bar{۲}٫۸۴۲۲$

(زیرا $۷\times ۰٫۸۳۴۶=۵٫۸۴۲۲$ و $۷\times\bar{۱}=-۷$ و $-۷+۵=-۲$)

۲۰ – برای تقسیم کردن یك لگاریتم بر یك عدد صحیح ، اگر **مفسر** لگاریتم مثبت یا صفر باشد تقسیم را بر طبق قاعدهٔ تقسیم اعداد اعشاری برعدد صحیح انجام می‌دهیم .

مثلاً اگر $log\,x=۲٫۷۳۱۵$ باشد ، $\frac{۱}{۳}\,log\,x=\frac{۲٫۷۳۱۵}{۳}=۰٫۹۱۰۵$

اما اگر **مفسر** لگاریتم منفی باشد در صورت لزوم با افزودن و کاستن یك عددصحیح شایسته ، آن لگاریتم را به مجموع یك‌عددجبری مثبت ویك عدد صحیح منفی چنان تبدیل می‌کنیم‌که عدد منفی بر مقسوم علیه قابل قسمت باشد ، بعد این مجموع جبری را بر آن عدد صحیح تقسیم می‌کنیم . مثلا اگر: $log\,y=\bar{۴}٫۵۱۲۸$ باشد :

$$\frac{۱}{۳}\,log\,y=\frac{۱}{۳}(\bar{۴}٫۵۱۲۸)=\frac{۱}{۳}(-۴-۲+۲٫۵۱۲۸)$$
$$=\frac{۱}{۳}(-۶+۲٫۵۱۲۸)=\bar{۲}٫۸۳۷۶$$

و اگر $log\,z=-۷$ باشد :

$$\frac{۱}{۵}\,log\,z=\frac{۱}{۵}(-۷)=\frac{۱}{۵}(-۷-۳+۳)=\frac{۱}{۵}(-۱۰+۳)=\bar{۲}٫۶$$

محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم

۲۱– با استفاده از قضایای قبل می‌توانیم :

۱) برای محاسبهٔ حاصل ضرب چند عدد مثبت لگاریتمهای آن اعداد را با هم جمع‌کنیم وعدد ما بازای آن مجموع را که همان‌حاصل ضرب مطلوب است بدست آوریم .

۲) برای محاسبهٔ قوهٔ nام یك عدد مثبت ، عدد ما بازای n برابر لگاریتم آن عدد را بدست آوریم .

۳) برای محاسبهٔ ریشهٔ n ام یك عدد مثبت ، عدد ما بازای $\frac{۱}{n}$ لگاریتم آن را بدست آوریم .

۴) برای محاسبهٔ خـارج قسمت دو عدد ، لگاریتم مقسوم را با کلگاریتم مقسوم‌علیه جمع‌کنیم وعدد ما بازای مجموع را بدست‌آوریم.

اینك چند مثال:

۲۲ – برای محاسبهٔ حاصل ضرب $۰٫۰۱۲۳۴\times ۵٫۶۸\times ۳۴۷$ ، اگر این حاصل‌ضرب را P بنامیم ، چنین عمل می‌کنیم :

$$log\,P=log\,۳۴۷+log\,۵٫۶۸+log\,۰٫۰۱۲۳۴$$

با استفاده از جدول لگاریتم خواهیم داشت :

$$log\,P=۲٫۵۴۰۳+۰٫۷۵۴۳+\bar{۲}٫۰۹۱۳=۱٫۳۸۵۹$$

که عدد مابازای ۱٫۳۸۵۹ یعنی ۲۴٫۳۲ مقدار تقریبی حاصل ضرب مطلوب است . $P\#۲۴٫۳۲$

۲۳ – برای محاسبهٔ قوهٔ هفتم ۱٫۳۵ ، اگر فرض کنیم که $x=(۱٫۳۵)^{۷}$ ، خواهیم داشت :

$$log\,x=۷\,log\,۱٫۳۵=۷\times ۰٫۱۳۰۳=۰٫۹۱۲۱$$

که عدد مابازای ۰٫۹۱۲۱ یعنی ۸٫۱۶۸ مقدار تقریبی قوهٔ هفتم ۱٫۳۵ است. $(۱٫۳۵)^{۷}\#۸٫۱۶۸$

۲۴ – برای محاسبهٔ ریشهٔ پنجم ۰٫۰۷۵ ، اگر فرض کنیم که $x=\sqrt[۵]{۰٫۰۷۵}$ خواهیم داشت :

$$\log x = \frac{1}{5}\log ۰/۰۷۵ = \frac{1}{5}(\bar{۲}/۸۷۵۱)$$

$$= \frac{1}{5}(-۵+۳/۸۷۵۱) = \bar{۱}/۷۷۵۰$$

یعنی : $\sqrt[5]{۰/۰۷۵} \# ۰/۵۹۵۷$

۲۵ـ مقدار کسر $x = \dfrac{۵/۴۷ \times \sqrt[3]{۳/۴۳}}{۲^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{۵/۲۳۸}}$ را با استفاده از جدول لگاریتم می‌توان چنین محاسبه کرد :

$$\log x = \log(۵/۴۷ \times \sqrt[3]{۳/۴۳}) + \operatorname{colog}\left(۲^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{۵/۲۳۸}\right)$$

$$= \log ۵/۴۷ + \frac{1}{3}\log ۳/۴۳ + \frac{3}{2}\operatorname{colog} ۲ + \frac{1}{4}\operatorname{colog} ۵/۲۳۸ \ (*)$$

برای اینکه محاسبهٔ عباراتی نظیر عبارت فوق به‌وسیلهٔ لگاریتم مشخص و بدون‌اشتباه باشد ،همیشه باید‌محاسبه را طبق نمونهٔ زیرمرتب نوشت :

محاسبهٔ $x = \dfrac{۵/۴۷ \times \sqrt[3]{۳/۴۳}}{۲^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{۵/۲۳۸}}$

$$\log x = \log ۵/۴۷ + \frac{1}{3}\log ۳/۴۳ + \frac{3}{2}\operatorname{colog} ۲ + \frac{1}{4}\operatorname{colog} ۵/۲۳۸$$

$$\operatorname{colog}(a \cdot b) = -\log(a \cdot b) = -\log a - \log b \ (*)$$
$$= \operatorname{colog} a + \operatorname{colog} b$$
$$\operatorname{colog} a^m = -\log a^m = -m\log a = m(-\log a) = m\operatorname{colog} a$$

محاسبه‌های فرعی	محاسبه‌های اصلی
$: \frac{1}{3}\log ۳/۴۳$	$\log ۵/۴۷ = ۰/۷۳۸۰$
$\log ۳/۴۳ = ۰/۵۳۵۳$	$\frac{1}{3}\log ۳/۴۳ = ۰/۱۷۸۴$
$\frac{1}{3}\log ۳/۴۳ = ۰/۱۷۸۴$	$\frac{3}{2}\operatorname{colog} ۲ = \bar{۱}/۵۴۸۵$
$: \frac{3}{2}\operatorname{colog} ۲$	$\frac{1}{4}\operatorname{colog} ۵/۲۳۸ = \bar{۱}/۸۲۰۲$
$\log ۲ = ۰/۳۰۱۰$	
$\operatorname{colog} ۲ = \bar{۱}/۶۹۹۰$	
$۳\operatorname{colog} ۲ = \bar{۱}/۰۹۷۰$	
$\frac{3}{2}\operatorname{colog} ۲ = \frac{1}{2}(\bar{۱}/۰۹۷۰) = \bar{۱}/۵۴۸۵$	
$: \frac{1}{4}\operatorname{colog} ۵/۲۳۸$	
۵۲۳ ۷۱۸۵	
$D = ۸$	
۸ ۶/۴	
$\log ۵/۲۳۸ = ۰/۷۱۹۱$	
$\operatorname{colog} ۵/۲۳۸ = \bar{۱}/۲۸۰۹$	
$\frac{1}{4}\operatorname{colog} ۵/۲۳۸ = \bar{۱}/۸۲۰۲$	
محاسبهٔ عدد ما بازای ۰/۲۸۵۱ :	$\log x = ۰/۲۸۵۱$
۲۸۳۳ ۱۹۲	
$D = ۲۳$	
۱۸ ۸	
$۰/۲۸۵۱ = \log ۱/۹۲۸$	نتیجه $x \# ۱/۹۲۸$

توجه کنید : ۱) مقدارعباراتی که‌به وسیلهٔ لگاریتم حساب‌می‌شود عموماً تقریبی است (زیرا لگاریتمهایی‌که در جدول نوشته شده عموماً تقریبی است) .

۲) چون اعداد منفی لگاریتم ندارند ، اگر مقدار یك عبارت

منفی را بخواهیم حساب کنیم ، کافی است که ابتدا قدر مطلق آن را به وسیلهٔ لگاریتم حساب کنیم و بعد حاصل را تغییر علامت دهیم .

تمرین

مطلوب است تعیین لگاریتم عبارات زیر :

۱- $\frac{\sqrt[4]{a^3b^2}}{3a^2b^3}$ ۲- $\frac{2\sqrt{b}}{a^2}$ ۳- $\sqrt{\frac{ab}{3mn^2}}$

مطلوب است تعیین x درصورتی‌که :

۴- $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{2}{3}\log b + 2\,\mathrm{colog}\,c + \frac{1}{3}\,\mathrm{colog}\,d$

۵- $\log x + \log 2x = 2$ ۶- $10^{5x} = 0.0654$

مقدار عددی عبارتهای زیر را به کمك لگاریتم حساب کنید :

۷- 2^{40} ۸- 3^{60}

۹- $(1.2)^{40}$ ۱۰- $\sqrt[3]{76971}$

۱۱- $(1.03)^{0}$ ۱۲- $\sqrt{2.7967}$

۱۳- $2.47\times(3.22)^{\frac{3}{4}}$ ۱۴- $1.7\times\sqrt[4]{(200047)^3}$

۱۵- $37.4(35.9)^2$ ۱۶- $\frac{(437)^3}{(2.7)^2}$

۱۷- $\frac{470\times0.749}{7342}$ ۱۸- $\frac{0.73}{6.82\times0.042}$

۱۹- $\sqrt[7]{421}$ ۲۰- $\sqrt[5]{0.349}$

۲۱- $\sqrt{\frac{25.7}{4.397}}$ ۲۲- $(267.9)^{\frac{5}{3}}$

۲۳- $\sqrt[3]{549.50}\times(12.1)^{\frac{3}{5}}$ ۲۴- $\sqrt[3]{549.05}$

۲۵- $\sqrt[5]{\frac{0.40\times(12.7)^3}{54.1}}$ ۲۶- $(-8.4)^{\frac{2}{3}}$

۲۷- $\sqrt{\frac{4}{73}\times\frac{0.0491\times(120)^3}{1.21\times47}}$

۲۸- $\frac{2.365\times45.98}{(0.00743)^3}$

۲۹- $\frac{756}{(2.1)^4}\sqrt{\frac{3.27\times(51)^9}{(1.00007)^4}}$

۳۰ - مطلوب است محاسبهٔ عبارت $3a^2b$ درصورتی‌که :

$\log a = 3.4125$ و $\log b = \bar{2}.2095$

۳۱ - اگر $\log 2 = 0.3010$ و $\log 3 = 0.4771$ باشد، بدون‌مراجعهٔ به جدول لگاریتم ، مطلوب است محاسبهٔ لگاریتم اعداد ۲۸۸ و ۳۶۰ .

۳۲- به ازای چه‌مقادیر a معادلهٔ $x^2 - 2a + \log a = 0$ دارای ریشه‌های حقیقی است ؟

۳۳ - ثابت‌کنید‌که $\left(\frac{86}{85}\right)^{1000}$ ازصد هزار بزرگتراست .

۳۴ - تساوی زیر را ثابت‌کنید :

$$\log\frac{11}{15} + \log\frac{490}{297} - 2\log\frac{7}{9} = \log 2$$

☆☆☆

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ اگر $N=10^x$ باشد لگاریتم N در پایهٔ ۱۰ مساوی است با x

یعنی : $\log N = x$

۲ ـ لگاریتم حاصل ضرب دویا چند عدد مثبت برابر است با مجموع لگاریتمهای آن دو یا چند عدد.

۳ ـ لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت برابراست با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه .

۴ ـ لگاریتم عکس هرعدد مساوی است با قرینهٔ لگاریتم آن‌عدد وقرینهٔ لگاریتم یك عدد راکلگاریتم‌آن عدد می‌نامند .

۵ ـ لگاریتم توان mام هرعدد مثبت ، مساوی m برابرلگاریتم آن عدد است .

۶ ـ لگاریتم ریشهٔ mام‌هرعددمثبت‌برابر است با $\frac{1}{m}$لگاریتم آن عدد .

۷ ـ اگر پایهٔ لگاریتم ۱۰ باشد آن را لگاریتم اعشاری می‌نامیم .

۸ ـ لگاریتم توانهای صحیح ۱۰ عدد صحیح است .

۹ ـ لگاریتم یك عدد شامل دوجزء صحیح واعشاری است .جزء صحیح را مفسر و جزء اعشاری را مانتیس لگاریتم می‌نامیم .

۱۰ ـ اگر عددی را درقوای صحیح ۱۰ ضرب یا بر آن تقسیم کنیم در مانتیس لگاریتم آن تغییری رخ نمی‌دهد .

۱۱ ـ مفسر لگاریتم عددی بزرگتر از یك ، مساوی است با عدهٔ ارقام صحیح آن عدد منهای یك .

۱۲ ـ مفسر لگاریتم عددی‌کوچکتر از یك ، عددی است منفی‌که قدر مطلق آن مساوی عدهٔ صفرهایی است‌که در چپ اولین رقم سمت چپ آن عدد است (با منظور نمودن صفر سمت چپ ممیز) .

۱۳ ـ مانتیس یا جزء اعشاری لگاریتم را از روی جدول‌لگاریتم‌بدست می‌آورند .

۱۴ ـ اگر لگاریتم عددی معلوم باشد وبخواهیم آن را به‌کمك جدول لگاریتم پیداکنیم ، آنتی لگاریتم یا عدد مابازای آن عدد را پیدا می‌کنیم .

۱۵ ـ برای نوشتن‌کلگاریتم یك عدد ، اولین رقم راست قسمت‌اعشاری لگاریتم آن را از۱۰ و رقمهای سمت چپ آن را از ۹کم می‌کنیم تا قسمت اعشاری کلگاریتم بدست آید . سپس مفسرلگاریتم را با ۱+ جمع می‌کنیم وآن را تغییر علامت می‌دهیم تا مفسرکلگاریتم بدست آید .

۱۶ ـ برای ضرب کردن عدد صحیح در لگاریتم یك عدد ، آن عدد صحیح رادرقسمت اعشاری‌لگاریتم ضرب می‌کنیم وواحدهای صحیح‌حاصل ضرب را (اگر وجود داشته باشد) به حاصل ضرب آن عدد در مفسر می‌افزاییم .

۱۷ ـ برای تقسیم‌کردن یك لگاریتم بر یك عدد صحیح ، اگر مفسر لگاریتم مثبت یا صفر باشد تقسیم را بر طبق قاعدهٔ تقسیم اعداد اعشاری‌برعدد صحیح انجام می‌دهیم . اما اگر مفسر لگاریتم منفی باشد در صورت لزوم با افزودن وکاستن عدد صحیح مناسبی آن لگاریتم را به‌مجموع یك عدد جبری مثبت ویك عدد صحیح‌منفی تبدیل می‌کنیم بطوری‌که عدد صحیح منفی برمقسوم علیه قابل قسمت باشد و بعد این مجموع جبری را بر آن عدد صحیح تقسیم می‌کنیم .

خود را امتحان کنید :

۱ ـ لگاریتم عدد n یعنی چه ؟

۲ ـ چرا اعداد منفی لگاریتم ندارند ؟

۳ ـ مفسر و مانتیس یعنی چه ؟ مفسر لگاریتم یك عدد را چگونه حساب می‌کنند ؟

۴ ـ لگاریتم ۱ چقدر است ؟ لگاریتم ۱۰ چقدر است ؟

۵ ـ لگاریتم حاصل ضرب دو عدد ، مساوی با چیست ؟

۶ ـ ریشهٔ پنجم یك عدد را به چه وسیله حساب می‌کنند ؟

۷ ـ عدد ما بازا یعنی چه ؟

۸ ـ کلگاریتم یك عدد چیست ؟ کلگاریتم ۱۰۰ چقدر است ؟

۹ ـ کلگاریتم ۰/۵۶ بین کدام دو عدد است ؟

۱۰ ـ اگر عددی را در قوای صحیح ۱۰ ضرب کنیم در لگاریتم آن چه تغییری پیدا می‌شود ؟

۱۱ ـ مانتیس لگاریتم اعداد را به چه وسیله تعیین می‌کنند ؟ اگر مانتیس لگاریتمی منفی باشد چطور آن را مثبت می‌کنند ؟

۱۲ ـ اگر مفسر لگاریتمی منفی باشد ، چگونه آن را در یك عدد ضرب یا بر یك عدد تقسیم می‌کنند ؟

۱۳ ـ لگاریتم عددی را که در جدول نیست چطور حساب می‌کنند ؟ آنتی لگاریتم یعنی چه ؟

۱۴ ـ اگر لگاریتم عدد معینی را در ۳ ضرب کنیم و عدد ما بازای آن را بدست آوریم ، چه رابطه‌ای بین این دو عدد وجود دارد ؟

۱۵ ـ اگر لگاریتم عدد معینی را با ۳ جمع کنیم و عدد ما بازای آن را بدست آوریم ، چه رابطه‌ای بین این دو عدد وجود دارد ؟

فصل دوم

تصاعد

الف ـ تصاعد عددی (حسابی)

۱ـ چوپانی صد گوسفند داشت . پیش خود قرار گذاشت که سالی ۲۰ رأس بر گوسفندهایش اضافه کند . می‌بینیم که تعداد گوسفندهایش تا سال چهارم چنین می‌شود :

چهارم	سوم	دوم	اول
۱۶۰	۱۴۰	۱۲۰	۱۰۰

این رشته اعداد ۱۰۰ ، ۱۲۰ ، ۱۴۰ و ۱۶۰ که هر یك مساوی عدد ماقبل به اضافهٔ عدد ثابت ۲۰ است **تصاعد حسابی** نامیده می‌شود . عدد ۱۰۰ را جملهٔ اول و عدد ۲۰ را قدر نسبت و عدد ۱۶۰ را جملهٔ آخر تصاعد حسابی می‌نامند . بطورکلی :

هرگاه چند عدد به دنبال هم بطریقی نوشته شده باشند که هریك از آنها مساوی با مجموع عدد پیش از خود و یك عدد ثابت باشد ، گوییم این چند عدد تشکیل تصاعد عددی (یا حسابی) داده‌اند .

هر یك از این اعداد را یك **جملهٔ** تصاعد و عدد ثابت را که باید با هر جمله جمع کرد تا جملهٔ بعد بدست آید **قدر نسبت** تصاعد می‌گویند.

مثلاً دستهٔ اعداد :

۳ ، ۷ ، ۱۱ ، ۱۵ ، ۱۹ ، ۲۳

تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهندکه قدر نسبت آن ۴ است و اعداد ۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ و ۱۹ و ۲۳ جمله‌های آنند . ۳ را جملهٔ اول و ۷ را جملهٔ دوم و۲۳ را جملهٔ ششم یا **جملهٔ آخر** می‌گویند . هر تصاعدِ عددی‌مانند: ۲۳ ، ۱۹ ، ۱۵ ، ۱۱ ، ۷ ، ۳ را چنین نمایش می‌دهیم :

÷۳ . ۷ . ۱۱ . ۱۵ . ۱۹ . ۲۳

یعنی در سمت چپ جملهٔ اول علامت ÷ را ، که علامت تصاعد حسابی است ، می‌نویسیم و بین جمله‌ها نقطه می‌گذاریم .

۲ـ واضح است که اگر جملهٔ اول وقدر نسبت یك تصاعد عددی معلوم باشد می‌توانیم جمله‌های دوم و سوم و.... را چنین‌حساب کنیم :

جملهٔ اول را باقدر نسبت جمع‌کنیم‌تا جملهٔ دوم بدست آید وبعد جملهٔ دوم را با قدرنسبت جمع‌کنیم تا جملهٔ سوم معلوم شود و به همین ترتیب سایر جمل را یکی پس از دیگری حساب کنیم . مثلا اگر جملهٔ اول‌یك تصاعد عددی ۲− و قدر نسبت آن ۵ باشد ، جملهٔ دوم آن −۲+۵=۳ وجملهٔ‌سوم‌آن ۳+۵=۸ است‌وآن تصاعدچنین می‌شود :

÷ −۲ . ۳ . ۸ . . . .

و اگر جملهٔ اول یك تصاعد عددی ۷ و قدرنسبت آن ۳− باشد ، پنج جملهٔ اول این تصاعد چنین است : ÷ ۷ . ۴ . ۱ . −۲ . −۵

می‌بینیم‌که :

عدهٔ جمل یك تصاعد عددی هرچه‌باشد ، باداشتن جملهٔ اول وقدر نسبت ، تمام جمله‌های آن ، یکی پس ازدیگری ، بدست می‌آید.

۳ـ هر گاه در یك تصاعد عددی قدر نسبت مثبت باشد جمله‌های تصاعدرفته رفته‌بزرگ می‌شوند ، دراین صورت تصاعد عددی را **صعودی** می‌گوییم. هرگاه قدرنسبت منفی باشد جمله‌ها رفته‌رفته‌کوچك می‌شوند وتصاعد عددی را **نزولی** می‌نامیم .

۴ـ محاسبهٔ جملهٔ nام یك تصاعد عددی برحسب جملهٔ اول و قدر نسبت .

اگر در تصاعد عددی جملهٔ اول برابر a و قدر نسبت برابر d باشد ، چنانکه گفته شد مقدارجمله‌های اول ، دوم ، سوم ، ....و nام این تصاعد، که‌آنها را بترتیب با t_1 ، t_2 ، t_3.... t_n نمایش می‌دهیم ، چنین است :

$$t_1=a$$
$$t_2=a+2d$$
$$t_3=a+2d$$
$$t_4=a+3d$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_n=a+(n-1)d$$

مثال ـ جملهٔ پانزدهم یك تصاعد عددی که جملهٔ اولش ۵− و قدرنسبتش ۳ باشد برابراست با :

$$-5+(15-1)\times 3=37$$

معمولاً جملهٔ آخریك تصاعد عددی را باحرف l نمایش می‌دهند.

بنابراین در یك تصاعد عددی که n جمله داشته باشد جملهٔ آخرآن l چنین می‌شود :

$$l=a+(n-1)d \qquad (1)$$

مثال ـ محاسبهٔ nاُمین عدد فرد از یك به بالا ـ سلسلهٔ اعداد فرد، تصاعدی عددی تشکیل می‌دهندکه جملهٔ اولش ۱ و قدر نسبتش ۲ است، پس :

$$l=1+(n-1)\times 2=2n-1$$

از این رو هفدهمین عدد فرد ۱ـ۳۴ یا ۳۳ است .

دقت‌کنید! از روی دستور ۱ می‌توان یکی از چهار مقدار a ، l ، n و d از یك تصاعد عددی را با داشتن سه مقدار دیگرحساب‌کرد. مثلاً قدر نسبت تصاعد عددی‌که جملهٔ اول‌آن a وجملهٔ آخرش l و عدهٔ جمله‌های آن n باشد برابر است با :

$$d=\frac{l-a}{n-1} \qquad (2)$$

۵ـ درج چند واسطهٔ عددی بین دو عدد مفروض ـ اگر بین دوعدد معلوم چند عدد طوری بنویسیم‌که دستهٔ اعداد حاصل تشکیل یك تصاعد عددی بدهند ، می‌گویندکه بین آن دوعدد چند **واسطهٔ عددی** درج شده است .

مثلاً اگر بخواهیم بین دو عدد ۱ و ۲۵ هفت واسطهٔ عددی درج کنیم چنین عمل می‌کنیم : چون از تصاعدی‌که بوجود خواهد آمد جملهٔ اول وجملهٔ آخر وشمارهٔ جمله‌ها را به این ترتیب داریم :
$a=1$ ، $l=25$ ، $n=7+2=9$ ، قدر نسبت را از روی دستور ۲

پیدا می‌کنیم :

$$d=\frac{25-1}{9-1}=3$$

بنابراین بین دوعدد ۱و۲۵ هفت واسطهٔ عددی چنین درج می‌شود:

÷ ۱ . ۴ . ۷ . ۱۰ . ۱۳ . ۱۶ . ۱۹ . ۲۲ . ۲۵

وهفت واسطهٔ عددی بین آن دو عدد معلوم از این قرارند :

۴ . ۷ . ۱۰ . ۱۳ . ۱۶ . ۱۹ . ۲۲

یك اصطلاح ـ اگر α و β دوجمله از تصاعدی باشندکه تعداد جمله‌های قبل‌از α مساوی تعداد جمله‌های بعد از β باشد ، آن دوجمله را **متساوی‌البعد** از طرفین می‌نامیم .

۶ـ قضیه ـ درهر تصاعد حسابی حاصل‌جمع هردوجملهٔ متساوی‌البعد از طرفین ، مساوی مجموع دو جملهٔ اول وآخر است .

برهان ـ فرض می‌کنیم که درتصاعد :

$$\div a.b \; . \; . \; . \; . \; \alpha \; . \; . \; . \; . \; \beta \; . \; . \; . \; . \; k.l$$

d قدرنسبت و دو جملهٔ α و β متساوی‌البعد از طرفین باشند . اگر عدهٔ جمل قبل از α برابر m باشد ، α جملهٔ $(m+1)$ام تصاعد ومقدار آن طبق دستور چنین است :

$$\alpha=a+md$$

حال اگر β را جملهٔ اول تصاعد فرض‌کنیم ، می‌بینیم که l جملهٔ $(m+1)$ ام است . بنابراین : $l=\beta+md$

پس‌ازحذف md بین این دوتساوی نتیجه می‌شودکه :

$$\alpha+\beta=a+l$$

نتیجه ـ اگر عدهٔ جمل یك تصاعد عددی فرد باشد ، جملهٔ وسط برابراست با نصف مجموع دوجملهٔ طرفین آن تصاعد (چرا؟).

نصف مجموع دوعدد را **واسطهٔ عددی** آن دو عدد می‌نامند. بنابراین هرسه عددکه تشکیل یك تصاعد عددی بدهند ، عدد وسط واسطهٔ عددی دوعدد دیگر است . بنابراین درهر تصاعد عددی هرجمله ، واسطهٔ عددی دو جملهٔ همجوار خود می‌باشد .

۷ ـ محاسبهٔ مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی ـ اگر مجموع جمله های تصاعد حسابی n جمله‌ای $\div a.b.c \ldots k.h.l$ را S بنامیم ، داریم :

$$S=a+b+c+\ldots\ldots+k+h+l$$
$$S=l+h+k+\ldots\ldots+c+b+a$$

طرفین این دو تساوی را نظیر بنظیرجمع می‌کنیم :

$$2S=(a+l)+(b+h)+(c+k)+\ldots\ldots+(k+c)+(h+b)+(l+a)$$

هر یك از پرانتزهای طرف دوم مجموع دو جملهٔ متساوی البعد از طرفین تصاعد است که می‌دانیم برابر مجموع $a+l$ است . اما عدهٔ پرانتزها مساوی است با عدهٔ جمله‌ها ، یعنی n . بنابراین :

$$2S=n(a+l)$$

$$S=\frac{n(a+l)}{2} \qquad (۳)$$

اگردر این رابطه به جای l مقدارش را برحسب a ، n و d قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

مثال ۱ ـ مجموع n عدد صحیح متوالی‌که از ۱ شروع می‌شود، چنین است :

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

زیرا این اعداد تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهندکه جملهٔ اول و جملهٔ آخر و عدهٔ جمله‌هایش بترتیب ۱ ، n و n است.

مثال ۲ ـ مجموع n عدد فرد متوالی‌که از۱ شروع می‌شود ، n^2 است ؛ زیرا این اعداد تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهندکه جملهٔ اول آن ۱ و قدر نسبت آن۲ و عدهٔ جمله‌هایش n است.

$$S=\frac{n[2+(n-1)\times 2]}{2}=n^2$$

دقت‌کنید ! اگردومقدار ازپنج مقدار a ، l ، d ، n وS مجهول باشد ، می‌توان آنها را از دستگاه زیر حساب‌کرد :

$$\begin{cases} l=a+(n-1)d \\ S=\frac{n(a+l)}{2} \end{cases}$$

مثال ـ جملهٔاول یك‌تصاعد عددی ده جمله‌ای،۵ ومجموع جمل آن ۱۸۵ است ؛ قدر نسبت و جملهٔ آخر آن را حساب‌کنید . در اینجا دستگاه دومجهولی زیر را داریم :

$$\begin{cases} l=۵+(۱۰-۱)d \\ ۱۸۵=\dfrac{۱۰(۵+l)}{۲} \end{cases}$$

ازمعادلهٔ دوم نتیجه می‌گیریم‌که $l=۳۲$ ؛ آن را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم ، خواهیم داشت : $۳۲=۵+۹d$ یا $d=۳$

تمرین

هفت جملهٔ اول هریك از تصاعدهای عددی زیر را بنویسید :

۱) $a=۲$ و $d=۳$ ‏ ۲) $a=۷۰$ و $d=-۵$

۳) $a=۱۵$ و $d=-۱$ ‏ ۴) $a=-۵$ و $d=-۳$

۵) $a=۵x$ و $d=-\frac{۵}{۲}x$ ‏ ۶) $a=x$ و $d=۳x-۱$

کدام دسته ازاعداد زیر ، تصاعد حسابی می‌سازند ؟

۷) ۱ ، ۳ ، ۸ ‏ ۸) ۱ ، ۴ ، ۷ ‏ ۹) $۵\frac{۷}{۳}$ ، $۶\frac{۴}{۷}$ ، $۷\frac{۵}{۷}$

۱۰) ۳ ، ۹ ، ۲۷ ‏ ۱۱) m ، $۲m^2$ ، $۳m^2$ ‏ ۱۲) m ، $۲m-۳$ ، $۳m-۶$

۱۳) جملهٔ نهم تصاعد عددی $\div ۳ . ۱۳ . \ldots$ را حساب‌کنید .

۱۴) جملهٔ هفتم تصاعد حسابی $\div ۵ . ۱۱ . \ldots$ را حساب‌کنید .

۱۵) جملهٔ بیستم تصاعد عددی $\div m . ۵m . \ldots$ را حساب‌کنید.

۱۶) جملهٔ یازدهم تصاعد حسابی $\div -۸\frac{۲}{۳} . -۶ . \ldots$ را حساب‌کنید .

۱۷) جملهٔ n ام تصاعد عددی $\div ۲ . ۴ . \ldots$ را حساب‌کنید .

۱۸) جملهٔ n ام تصاعد عددی $\div \frac{a}{b} . \frac{a-۱}{b} . \ldots$ را حساب‌کنید .

۱۹) مجموع بیست جمله ازتصاعد عددی $\div -۲۸ . -۲$ را حساب‌کنید .

۲۰) مجموع نه جمله ازتصاعد عددی $\div ۱۱ . ۲۵$ را حساب‌کنید .

۲۱) مجموع دوازده جمله ازتصاعد عددی $\div ۱۰ . ۱۴$ را حساب‌کنید .

۲۲) یك تصاعد حسابی بنویسیدکه پنجمین جمله‌اش ۶ و دهمین جمله‌اش ۸ باشد .

۲۳) دریك تصاعد عددی $n=۱۲$ ، $a=۱$ و $d=\frac{۲}{۳}$ ؛ حساب‌کنید l و S را .

۲۴) در یك تصاعد عددی $a=۶۵$ و $n=۹$ و $S=۳۳۲$ ؛ حساب‌کنید d و l را .

۲۵) برمحیط دایره‌ای پانزده‌نقطه واقع است . ازهر نقطه‌به نقاط دیگر وصل می‌کنیم . تعیین‌کنید عدهٔ وترهای حاصل را .

۲۶) اگر اعداد a ، b و c جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی باشند ، ثابت‌کنید که اعداد b^2+bc+c^2 ، c^2+ac+a^2 و a^2+ab+b^2 نیز تشکیل یك‌تصاعد حسابی می‌دهند .

۲۷) تحقیق‌کنیدکه مربعات عبارات : $x^2-۲x-۱$ و $x^2+۱$ و $x^2+۲x-۱$ جمله‌های متوالی یك تصاعد عددی می‌شوند .

۲۸) S و S' و S'' بترتیب مجموع n جملهٔ اول سه تصاعد عددی است‌که جملهٔ اول هرسه ، ۱ وقدر نسبت آنها بترتیب ۱ ، ۲ و ۳ است ، تحقیق‌کنید که S ، S' و S'' نیز تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهند.

۲۹) اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی **هستند ؛** ثابت‌کنید که قدر نسبت این تصاعد مساوی ربع ضلع متوسط آن است و اضلاع این مثلث را می‌توان به صورت $۳d$ ، $۴d$ و $۵d$ نوشت .

۳۰) مطلوب است جملهٔ n ام وحاصل جمع n جملهٔ اول تصاعد زیر:

$$1 ، \frac{a-1}{a} ، \frac{a-2}{a} ، \frac{a-3}{a} \ldots\ldots$$

۳۱) یك تصاعد حسابی تشکیل دهیدکه قدر نسبت آن ، واحد ومجموع n جملهٔ اولش ۳۳ وجملهٔ مرتبهٔ n ام آن ۸ باشد .

۳۲) دومتحرك‌که به فاصلهٔ ۲۰۱۰ متر از یکدیگرقراردارند ، دریك لحظه روبه‌هم حرکت می‌کنند . اولی در ثانیهٔ اول ۸ متر، در ثانیهٔ دوم ۱۳ متر ، درثانیهٔ سوم ۱۸ متر و ... طی می‌کند . دومی درثانیهٔ اول ۷ متر ، درثانیهٔ دوم ۱۱ متر ، در ثانیهٔ سوم ۱۵ متر و ... طی می‌کند . تعیین‌کنید پس از چه مدت به هم می‌رسند ؟ (دو مسئلهٔ ۳۱ و ۳۲ باید بعد از یادگرفتن حل معادلهٔ درجهٔ دوم حل شود) .

۳۳) با پهلوی هم و روی هم قرار دادن گلوله های متساوی چدنی ، هرمی می سازیم‌که قاعده‌اش مثلث متساوی‌الاضلاع و در هر ضلع قاعده ۱۰ گلوله باشد. تعیین‌کنید : اولاً ــ شمارهٔ گلوله‌هایی‌که در قاعدهٔ هرم مصرف می‌شود . ثانیاً ــ شمارهٔ گلوله‌هایی راکه هرم با آن ساخته می‌شود . **راهنمایی** ــ گلوله‌های مثلثهایی را که هرم را بوجود می‌آورند حساب‌کنید و با هم جمع کنید .

۳۴) اگر جسمی را رهاکنیم‌که بیفتد ، با فرض آنکه هوا مقاومتی در مقابل حرکت آن جسم نداشته باشد ، یعنی در فضایی خالی از هوا تجربه‌کنیم ، خواهیم دیدکه درثانیهٔ اول ۴٫۹ متر ، در ثانیهٔ دوم ۱۴٫۷ متر ، در ثانیهٔ سوم ۲۴٫۵ مترو.... می‌پیماید . اولاً ــ معین‌کنید در ثانیهٔ دهم چه فاصله‌ای می پیماید . درثانیهٔ n ام چقدر ؟

ثانیاً ــ اگر درثانیهٔ دوازدهم به زمین برسد ، از چند متری رها شده است ؟

ب ــ تصاعد هندسی

۸ ــ رهنوردی تصمیم گرفت که هر روز به اندازهٔ دو برابر روز قبل راه برود . اگر در روز اول ۵۰۰ متر راه رفته باشد ، مقدار راهی که او در روزهای متوالی پیموده است ، چنین می‌شود :

(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)
۸۰۰۰	۴۰۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۵۰۰

این رشته اعداد ونظایرآن را که هریك مساوی عدد ماقبل ضرب در عددثابتی است ، **تصاعد هندسی** می‌نامند . بطورکلی :

هرگاه چندعدد ، غیرازصفر ، به‌دنبال هم چنان نوشته شده باشدکه هریك‌ازآنها برابرحاصل ضرب عدد پیش ازخودش دریك عدد ثابت باشد ، می‌گوییم این چندعدد یك تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند .

هریك ازآن اعداد را یك **جملهٔ** تصاعد و عدد ثابت را**قدر نسبت** آن تصاعد می‌نامیم . مثلاً دستهٔ پنج عدد : ۳۲۴ ، ۱۰۸ ، ۳۶ ، ۱۲ و ۴ تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهدکه قدرنسبت‌آن ۳ است ؛زیرا هریك از این اعداد سه‌برابر عدد سمت چپ خودش می‌باشد . اعداد ۴ و۱۲ و ۳۶ و ۱۰۸ و ۳۲۴جمله‌های این تصاعدند . اعداد۴،۱۲و ۳۲۴رابترتیب جملهٔ اول ، جملهٔ دوم و **جملهٔ آخر** این تصاعد می‌نامیم .

هرتصاعد هندسی، مثلاً تصاعد بالا را چنین نمایش می‌دهیم :

∺ ۴ : ۱۲ : ۳۶ : ۱۰۸ : ۳۲۴

یعنی درسمت چپ‌علامت (∺) را ،که علامت تصاعدهندسی‌است،

می‌گذاریم ، و در میان جمله‌ها علامت (:) را می‌گذاریم . بنابراین‌وقتی

که می‌نویسیم: $∺ 2 : \frac{2}{3}$

مقصودآن است که ۲ و $\frac{2}{3}$ دو جملهٔ اول و دوم یك تصاعد هندسی است . واضح است که اگر جملهٔ اول وقدرنسبت یك تصاعد هندسی معلوم‌باشد، می‌توان جمله‌های دیگر را یکی پس از دیگری حساب‌کرد . همچنین اگر دوجملهٔ متوالی از یك تصاعد هندسی معلوم‌باشد ، می‌توان به وسیلهٔ عمل تقسیم ، قدر نسبت وسپس سایرجمل‌آن تصاعد را معلوم‌کرد .

دقت کنید! در یك تصاعد عددی یا حسابی ممکن است یکی‌از جمله‌ها صفر باشد اما در تصاعد هندسی ، بافرض صفر نبودن اولین‌عدد، هیچیك از جمله‌های دیگر صفر نخواهد شد ، و با صفر بودن‌اولین عدد همهٔ اعداد دیگر صفر خواهد بودکه‌مخالف تعریف تصاعد هندسی‌است.

۹ـ محاسبهٔ‌جملهٔ n ام یك تصاعد هندسی برحسب‌جملهٔ‌اول وقدر نسبت ـ جمله‌های تصاعد هندسی را بترتیب $t_1 ، t_2 ، t_3 ، \ldots\ldots t_n$ می‌نامیم . اگر جملهٔ‌اول a وقدرنسبت q باشد داریم :

$$t_1=a ،\ t_2=aq ،\ t_3=aq^2 ،\ t_4=aq^3 \ldots\ldots t_n=aq^{n-1}$$

پس اگر تصاعد فقط n جمله داشته باشد ، جملهٔ آخر که همان جملهٔ nام است وآن را l می‌نامیم ، ازاین دستور بدست می‌آید :

$$l=aq^{n-1} \qquad (1)$$

مثلاً جملهٔ ششم یك تصاعد هندسی که جملهٔ اولش a = ۴ و قدر

نسبتش q = ۲ ، چنین است :

$$t_6=4\times 2^{6-1}=4\times 2^5=128$$

همچنین جملهٔ هفتم یك تصاعد هندسی که جملهٔ اولش ۷۲۹ و قدرنسبتش $\frac{1}{3}$ باشد ، چنین است :

$$t_7=729\times\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}=\frac{729}{729}=1$$

دقت‌کنید! از روی دستور ۱ می‌توان یکی از چهار مقدار a ، l ، n و q را ، به شرط داشتن سه مقدار دیگر، حساب‌کرد . مثلاً قدر نسبت یك تصاعد هندسی که جملهٔ اول آن a و جملهٔ آخرش l و عدهٔ جمله‌هایش n باشد ، از روی یکی‌از دو دستور زیر بدست می‌آید :

$$(1)\quad q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$
وقتی‌که n − ۱ فرد باشد ؛

$$(2)\quad q=\pm\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$
وقتی‌که n − ۱ زوج باشد

توضیح مهم! هرگاه عدد (n − ۱) زوج و از تصاعد هندسی‌فقط جملهٔ‌اول وآخرآن معلوم باشد، برای q دوجواب قرینه ازدستورشمارهٔ ۲ بدست می‌آید .

۱۰ـ درج چند واسطهٔ هندسی بین دوعدد مفروض ـ منظور از درج مثلاً ۵ واسطهٔ هندسی مابین اعداد ۳ و ۱۹۲ آن است که بین ۳ و ۱۹۲ پنج عدد طوری بنویسیم‌که دستهٔ هفت عدد حاصل تشکیل یك تصاعد هندسی بدهند. بنابراین چون ازتصاعد مطلوب جملهٔ اول وجملهٔ آخرو عدهٔ جمله‌ها معلوم است ، داریم :

$$a=3 \quad \text{و} \quad l=192 \quad \text{و} \quad n=5+2=7$$

$$q=\pm\sqrt[۷-۱]{\frac{۱۹۲}{۳}}=\pm\sqrt[۶]{۶۴}=\pm\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=\pm۲$$

پس این دو تصاعد هندسی را خواهیم داشت :

$$∺۳ : \pm۶ : ۱۲ : \pm۲۴ : ۴۸ : \pm۹۶ : ۱۹۲$$

و پنج واسطهٔ هندسی مطلوب از این قرارند :

۹۶ ، ۴۸ ، ۲۴ ، ۱۲ ، ۶

یا ۹۶− ، ۴۸ ، ۲۴− ، ۱۲ ، ۶−

نکتهٔ مهم ! اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی یك تصاعد هندسی باشند ، b واسطهٔ هندسی است بین a و c ؛ زیرا:

$$\frac{b}{a}=q \quad و \quad \frac{c}{b}=q$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$$

$$b^{۲}=a\cdot c$$

بر عکس اگر b واسطهٔ هندسی بین a و c باشد ، a ، b و c سه جملهٔ متوالی یك تصاعد هندسی خواهند بود (چرا؟) .

۱۱ ـ محاسبهٔ مجموع جمل تصاعد هندسی ـ اگر مجموع n جملهٔ تصاعد هندسی:

$$∺a:b:c:\dots\dots:k:l$$

را S و قدر نسبت را q بنامیم ، داریم :

$$S=a+b+c+\dots\dots+k+l$$
$$Sq=aq+bq+\dots\dots+kq+lq$$

حال اگر به همین ترتیب که نوشته شده است ، تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم ، با درنظر گرفتن

$$b=aq \quad و \quad c=bq \;\dots\dots\; l=kq$$

خواهیم داشت :

$$Sq-S=lq-a$$
$$S(q-۱)=lq-a$$

و به فرض: $q\neq۱$

$$S=\frac{lq-a}{q-۱} \qquad (۲)$$

(اگر $q=۱$ ، همهٔ جملهها برابر a و $S=na$ خواهد بود).

اگر در دستور۲ به جای l مقدارش $aq^{n-۱}$ را بگذاریم ، خواهیم داشت :

$$S=a\frac{q^{n}-۱}{q-۱} \qquad (۳)$$

مثلاً اگر در یك تصاعد هندسی جملهٔ اول ۲ و جملهٔ آخر ۱۲۵۰ و قدر نسبت ۵ باشد ، مجموع جملههای آن چنین است :

$$S=\frac{۱۲۵۰\times۵-۲}{۵-۱}=۱۵۶۲$$ (از دستور۲)

و اگر جملهٔ اول ۲۵۶ و قدرنسبت $\frac{۱}{۴}$ وعدهٔ جمله‌های یك تصاعد هندسی ۶ باشد ، از روی دستور ۳ داریم :

$$S=۲۵۶\times\frac{\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۶}-۱}{\frac{۱}{۴}-۱}=۲۵۶\times\frac{\frac{۴۰۹۵}{۴۰۹۶}}{\frac{۳}{۴}}=۳۴۱/۲۵$$

توجه کنید! اگر این عددها راکه به توان رسیده است :

$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}$	$۲^{۳}=۸$
$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}=\frac{۱}{۱۶}$	$۲^{۴}=۱۶$
$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{۱}{۳۲}$	$۲^{۵}=۳۲$

بدقت ملاحظه کنید ، می‌فهمیدکه :

الف ـ هرعدد مثبت بزرگتراز واحد چون به توان عددی بزرگتر از۱ برسد ؛ بزرگترمی‌شود .

ب ـ هرعدد مثبت کوچکتراز واحد چون به توان عددی بزرگتر از ۱ برسد ، کوچکتر می‌شود وهرقدر نمای آن بزرگتر باشد ، حاصل کوچکتر می‌گردد ؛ بطوری که اگر نما بی‌اندازه بزرگ شود ، حاصل بی‌اندازه کوچك و به صفر نزدیك می‌شود و می‌توان آن را برابر صفر گرفت .

۱۲ـ دردستور $S=a\frac{q^n-۱}{q-۱}$ اگر $|q|<۱$ و n عدهٔ جمله‌های

تصاعد هندسی بی اندازه بزرگ شود ، دستور نامبرده به صورت سادهٔ $S=a\frac{-۱}{q-۱}$ یا $S=\frac{a}{۱-q}$ در می‌آید (از q^n که بی اندازه کوچك است صرف نظرشده است) .

مثلاً مجموع بینهایت جملهٔ تصاعد هندسی:

$$\div\div ۵:\frac{۵}{۲}:\frac{۵}{۴}:\ldots$$

چنین می‌شود: $S=\frac{۵}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۵}{\frac{۱}{۲}}=۱۰$

دراین تصاعد ۱۰ را **حد مجموع** جمل آن می‌نامند .

۱۳ ـ تبدیل کسر اعشاری متناوب به‌کسر متعارفی ـ درتبدیل کسرمتعارفی به‌کسراعشاری دوحالت اتفاق می‌افتد :

حالت اول ـ پس‌ازیك یا چندتقسیم ، به باقیماندهٔ صفرمی‌رسیم . مانند $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۸}$ که بترتیب برابر ۰/۴ و ۰/۳۷۵ است . در این حالت کسر متعارفی مفروض **برابر یك کسر اعشاری است** که عدهٔ ارقامش محدود است . بعکس کسر اعشاری ۰/۳۷۵ به ترتیب زیر به‌کسرمتعارفی تبدیل می‌شود :

$$۰/۳۷۵=\frac{۳۷۵}{۱۰۰۰}=\frac{۳}{۸}$$

حالت دوم ـ هرچند عمل تقسیم را ادامه دهیم ، به باقیماندهٔ صفر نمی‌رسیم ؛ مانند $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱۵}{۸۸}$:

۱۵۰ | ۸۸
۰/۱۷۰۴۵۴۵...
۶۲۰
۴۰۰
۴۸۰
۴۰۰
...
...

۲۰ | ۳
۰/۶۶۶ . . .
۲۰
۲۰
۲۰
..
..
..

اعدادی مانند ...۰/۶۶۶ و ...۰/۱۷۰۴۵۴۵ را عددهای اعشاری متناوب می‌نامند.

عدد اعشاری متناوب، عددی است اعشاری که عدهٔ ارقامش نامحدود و اما تشکیل شده باشد از چند رقم که به ترتیب معین تکرار شده باشند.

مانند ...۰/۴۷۴۷ و ...۰/۱۷۴۵۳۴۵۳۴۵۳

که در اولی **دو رقم ۴، ۷** و در دومی **سه رقم ۴، ۵، ۳** به دنبال هم مرتباً تکرار می‌شود. ۴۷ را **دورهٔ (*)** عدد ...۰/۴۷۴۷ و ۴۵۳ را دورهٔ عدد ...۰/۱۷۴۵۳۴۵۳ می‌نامند. هرعدد اعشاری متناوب مانند

...۰/۶۶۶ و ...۰/۴۷۴۷

که دوره‌اش بلافاصله پس از ممیز شروع می‌شود، کسر یا **عدد اعشاری متناوب ساده** نامیده می‌شود و هر عدد اعشاری متناوب مانند ...۰/۱۷۰۴۵۴۵ و ...۰/۴۲۷۵۲۷۵ را که در آن، دوره، بلافاصله پس از ممیز شروع نشود، کسر (عدد) **اعشاری متناوب مرکب** می‌نامند.

در عدد اعشاری متناوب مرکب ارقامی را که بین ممیز و اولین

(*) کلمهٔ دوره را به جای دورهٔ گردش انتخاب کرده‌ایم.

دوره قراردارد، ارقام ثابت و عدد حاصل از این ارقام را **جزء ثابت (*)** می‌نامیم. مثلاً ارقام ۱، ۷ و ۰، رقمهای ثابت و عدد ۱۷۰ جزء ثابت عدد اعشاری مرکب ۰/۱۷۰۴۵۴۵ است.

کسر $\frac{2}{3}$ را که از تقسیم صورت آن بر مخرجش کسر اعشاری متناوب ...۰/۶۶۶ بدست می‌آید **کسر مولد** این کسر اعشاری متناوب می‌گویند. همچنین کسر $\frac{15}{88}$ را کسر مولد عدد اعشاری متناوب مرکب ۰/۱۷۰۴۵۴۵ می‌گویند.

بعکس می‌توان تحقیق کرد که هر کسر اعشاری متناوب (که دوره‌اش ۹ نباشد)، از یک کسر متعارفی تولید می‌شود؛ یعنی دارای یک کسر مولد است.

مثلاً اگر بخواهیم مولد کسر اعشاری سادهٔ متناوب .....۰/۶۶۶ را پیدا کنیم، می‌گوییم که آن کسر برابر مجموع ۰/۶، ۰/۰۶، ۰/۰۰۶ و ...... است. چنانکه می‌بینیم این اعداد جمله‌های تصاعد هندسی زیرند:

$$\div\div\, 0/6 : 0/06 : 0/006 : \ldots$$

که جملهٔ اولش ۰/۶ و قدر نسبتش $\frac{1}{10}$ است و چون عدهٔ جمل تصاعد بی‌اندازه بزرگ است، مجموع آن برابر: $S=\frac{0/6}{1-\frac{1}{10}}=\frac{6}{9}$ است.

همچنین مولد کسر اعشاری متناوب ...۰/۴۵۳۴۵۳ مجموع جمل

* این اصطلاح را به جای دورهٔ غیرگردش که به نظر ما صحیح نیست، انتخاب کرده‌ایم.

یك تصاعد هندسی نزولی است که جملهٔ اول آن ۴۵۳/ ۰ و قدر نسبتش $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است .

$$۰/۴۵۳۴۵۳.... = \frac{۰/۴۵۳}{۱ - \frac{۱}{۱۰۰۰}} = \frac{۴۵۳}{۹۹۹}$$

ازاین دومثال می‌توان نتیجه‌گرفت که :

مولد هرکسر اعشاری متناوب ساده (کوچکتر ازواحد) کسری است‌که صورتش برابردورهٔ آن‌ومخرجش‌عددی است‌که‌تمام‌رقمهایش ۹و عدهٔ رقمهایش برابرعدهٔ رقمهای دوره باشد .

مثلاً : کسرمولد ...۶۶۶/ ۰ کسر $\frac{۶}{۹}$ یا $\frac{۲}{۳}$ است .

کسرمولد ...۴۵۳۴۵۳/ ۰ کسر $\frac{۴۵۳}{۹۹۹}$ یا $\frac{۱۵۱}{۳۳۳}$ است .

کسرمولد ...۲۷۰۲۷۰/ ۰ کسر $\frac{۲۷۰}{۹۹۹}$ یا $\frac{۱۰}{۳۷}$ است .

کسرمولد ...۰۸۰۸۰۸/ ۰ کسر $\frac{۸}{۹۹}$ است .

اگر بخواهیم کسر مولد اعشاری متناوب مرکب ....۳۲۷۵۲۷۵/ ۰ را پیداکنیم چنین عمل می‌کنیم :

$$۰/۳۲۷۵۲۷۵... = \frac{۱}{۱۰}(۳/۲۷۵۲۷۵...) = \frac{۱}{۱۰}(۳ + ۰/۲۷۵۲۷۵...)$$

$$= \frac{۱}{۱۰}\left(۳ + \frac{۲۷۵}{۹۹۹}\right) = \frac{۱}{۱۰}\left(\frac{۳ \times ۹۹۹ + ۲۷۵}{۹۹۹}\right)$$

$$= \frac{۱}{۱۰}\left[\frac{۳(۱۰۰۰ - ۱) + ۲۷۵}{۹۹۹}\right]$$

$$= \frac{۱}{۱۰}\left(\frac{۳۲۷۵ - ۳}{۹۹۹}\right) = \left(\frac{۳۲۷۵ - ۳}{۹۹۹۰}\right)$$

بنابراین :

کسر مولد هرکسر اعشاری متناوب مرکب (کوچکتر از واحد) کسری است متعارفی که‌صورتش عددی‌است صحیح برابر باقیماندهٔ تفریق جزء ثابت‌از عددی‌که تشکیل‌شده‌است ازجزء ثابت ویك دوره،ومخرجش‌عددی است صحیح تشکیل‌شده ازچند۹وبه‌دنبال آن چند صفرکه شمارهٔ ۹هابرابر عدهٔ‌ارقام‌دوره وشمارهٔ‌صفرها برابرعدهٔ ارقام ثابت‌باشد .

مثلا مولدکسر اعشاری متناوب . . . ۳۲۷۵۲۷۵/ ۰ کسر $\frac{۳۲۷۵-۳}{۹۹۹۰}$ یا $\frac{۱۶۳۶}{۴۹۹۵}$ است ، و مولد کسر اعشاری متناوب . . . ۱۷۰۴۵۴۵/ ۰ کسر $\frac{۱۷۰۴۵-۱۷۰}{۹۹۰۰۰}$ یا $\frac{۱۵}{۸۸}$ است .

تمرین

شش جملهٔ تصاعدهای هندسی زیررا بنویسید :

۱) $a=۳$ و $q=۲$ ۲) $a=۳$ و $q=\frac{۱}{۳}$

۳) $a=۳$ و $q=-۲$ ۴) $a=۴$ و $q=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۵) $a=\frac{۲}{۳}$ و $q=\frac{۳}{۲}$ ۶) $a=\frac{۷}{۲}$ و $q=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

کدام دسته ازاعداد زیر تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند و قدر نسبت آنها چیست ؟

۷) ۵۴ ، ۱۸ ، ۶ ۸) ۱۸ ، ۱۲ ، ۶

۹) $\frac{۱}{\sqrt{۸}}$ ، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، ۲ ۱۰) $\sqrt{۲}$ ، ۱ ، $\sqrt{۲}$

۱۱) $\frac{۱۲}{x^۲}$ ، ۶ ، $۲x^۲$ ۱۲) $۹\sqrt{۳}$ ، ۹ ، $۲\sqrt{۳}$

۱۳) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ‏ ۱۴) ۶ ، ۳− ، $\frac{3}{2}$

۱۵) باچه شرطی a ، b و c یك تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند ؟

۱۶) جملهٔ $(n-1)$ام یك تصاعد هندسی چقدر است ؟

۱۷) جملهٔ پنجم تصاعد هندسی $∺ \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \ldots$ راحساب کنید .

۱۸) جملهٔ دهم تصاعد هندسی $∺ 1 : 2 \ldots$ را حساب کنید .

۱۹) جملهٔ ششم تصاعد هندسی $∺ 5 : -10 : \ldots$ را حساب کنید .

۲۰) تحقیق کنیدکه‌اگر دریك تصاعد هندسی هرجمله را ازجملهٔما بعد تفریق کنیم ، باقیمانده‌ها تشکیل یك تصاعد هندسی‌می‌دهند .

۲۱) مجموع $3+6+12+\ldots+192$ را حساب کنید .

۲۲) سومین جملهٔ یك تصاعد هندسی ۹ و پنجمین جمله‌اش ۳۶ است ؛ هشتمین جملهٔآن را بنویسید .

۲۳) مجموع $x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^n$ را حساب‌کنید .

۲۴) مجموع $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x^n}$ را حساب کنید .

۲۵) مجموع $a+2a^3+4a^5$ را تا جملهٔ nام حساب کنید .

۲۶) حد مجموع جمل هریك از تصاعدهای زیر را حساب کنید :

$∺ 2 : \frac{1}{2} : \ldots\ldots$

$∺ 27 : 9 : \ldots\ldots$

$∺ 3 : 1 : \frac{1}{3} : \ldots\ldots$

$∺ \sqrt{6} : 1 : \ldots\ldots$

$∺ 1 : x : x^2 : \ldots\ldots$ ‏ با فرض $(|x|<1)$

$∺ 1 : \frac{-1}{a} : \ldots\ldots$ ‏ با فرض $a>1$

۳۷) هریك ازکسرهای اعشاری زیر را به‌کسر متعارفی تبدیل کنید :

۰/۳۳۳.......... و ۰/۶۳۶۳.......... و ۰/۵۳۱۳۱..........

۰/۱۷۵۲۵۲........ ۰/۲۴۳۷۳۷۳۷........ و ۰/۵۸۵۸۵۸........

۳۸) ثابت کنید که اگر اضلاع a ، b ، c و ارتفاع h_a ازیك مثلث بترتیب جمل متوالیهٔ یك تصاعد هندسی باشند ، آن مثلث قائم‌الزاویه است . با فرض معلوم بودن a اضلاع مثلث را تعیین کنید .

۳۹) اگرa،b وc جمل متوالیهٔ یك تصاعد هندسی باشند ، ثابت کنید که معادلهٔ $ax^2+2bx+c=0$ دارای یك ریشهٔ مضاعف است .

۴۰) اگرx،y و z جمل متوالی یك تصاعد هندسی باشند ، ثابت‌کنید که $(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2$.

۴۱) مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌ضلع a مفروض است .چون اوساط‌اضلاع را به‌یکدیگر وصل‌کنیم ، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری تشکیل می‌شود . حال اگر اوساط اضلاع این مثلث را نیز به یکدیگر وصل کنیم و این عمل را بینهایت مرتبه ادامه دهیم: اولاً ــ حد مجموع محیطهای مثلثهای حاصل را تعیین کنید . ثانیاً ـ حد مجموع مساحتهای این‌مثلثهارا تعیین‌کنید .

۴۲) دایره‌ای به مرکز O وقطر $AB=2R$ مفروض است ؛ به قطر OA دایره‌ای رسم می‌کنیم ؛ شعاع دایرهٔ دوم‌را نیز قطر قرار داده دایره‌ای به همین طریق رسم می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم ؛ مطلوب است حد مجموع محیط ومجموع مساحتهای این دوایر .

۴۳) یك مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مفروض است ؛ در دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث نیزمثلثی متساوی الاضلاع محاط می‌کنیم و در دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث نیز مثلثی متساوی الاضلاع محاط می‌کنیم ؛ به همین طریق عمل را ادامه می‌دهیم ؛ مطلوب است حد مجموع مساحتهای دوایر محاطی مثلثها .

۳۴) مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر a وبه اضلاع b و c مفروض است. از رأس قائمه عمودی بر وتر فرود می‌آوریم و از موقع آن ، عمود دیگری بر ضلع b رسم می‌کنیم و از موقع این عمود ، عمود دیگری بر وتر فرود می‌آوریم و این عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم؛ مطلوب است : اولاً ـ محاسبهٔ‌طول‌هریك ازعمودها برحسب a ، b و c . ثانیاً ـ محاسبهٔ حدمجموع طول این عمودها .

۳۵) دایره‌ای به شعاع R مفروض است ؛ محیط آن را به‌هشت قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم ؛ از مرکز به نقاط تقسیم A ، B ، C و .... وصل می‌کنیم‌اگر از نقطهٔ A عمودی بر OB واز موقع این عمود، عمود دیگری برشعاع OC رسم کنیم واین عمل‌را تا شعاع آخر ادامه دهیم: اولاً ـ مطلوب است طول این عمودها . ثانیاً ـ اگر این عمل را به همین طریق ادامه‌دهیم، مطلوب است حد مجموع طول این عمودها .

۳۶) احمد و علی با هم قرار گذاشتندکه احمد روز اول بهمن‌ماه ده تومان به علی بدهد ، روز دوم ۲۰ تومان، روز سوم ۳۰ تومان ؛ بـه همین ترتیب تا روز پانزدهم بهمن‌ماه ؛ وعلی روز شانزدهم یك‌ریال،روز هفدهم دو ریال ، روز هجدهم چهار ریال ، روز نوزدهم هشت ریال وبه همین ترتیب‌تا روز سی‌ام بهمن ماه به‌احمد بدهد ؛ این قرار به‌نفع‌کدام یکی است ؟

* * *

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ـ هرگاه چند عدد به دنبال هم چنان نوشته شده باشندکه هریك از آنها مساوی بامجموع عدد پیش‌ازخود و یك عدد ثابت باشد ، این چند عدد تشکیل تصاعد عددی یاتصاعد حسابی می‌دهند .

۲ـ دریك تصاعد حسابی جملهٔ اول را a وقدرنسبت را d ، عدهٔ جمل را n ، جملهٔ nام را l ومجموع n جملهٔ اول را S می‌نامیم .

۳ـ دریك تصاعد حسابی جملهٔ nام چنین است :

$$l=a+(n-1)d$$

۴ـ درهرتصاعد حسابی محدود ، حاصل جمع هردوجملهٔ متساوی‌البعد ازطرفین ، مساوی مجموع دوجملهٔ اول وآخراست .

۵ـ دریك تصاعد حسابی محدود، دستورمجموع n جملهٔ اول‌آن چنین است :

$$S=\frac{n}{2}(a+l)$$

یا

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

۶ـ هرگاه چند عدد مخالف صفر به دنبال هم چنان نوشته شده باشند که هریك ازآنها برابرحاصل‌ضرب عدد پیش ازخودش دریك عدد ثابت باشد، این چند عدد تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۷ـ دریك تصاعد هندسی، جملهٔ اول را a ، قدر نسبت را q عدهٔ جمل را n ، جملهٔ nام را l ومجموع n جملهٔ اول را S می‌نامیم.

۸ـ دریك تصاعد هندسی l ، جملهٔ nام آن ، چنین بدست می‌آید :

$$l=a\cdot q^{n-1}$$

۹ـ واسطهٔ هندسی هردو عدد با آن دو عدد تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهد و بعکس .

۱۰ـ حاصل‌جمع n جملهٔ اول‌تصاعدهندسی‌که قدرنسبت‌آن مثبت باشد، برطبق این دستور بدست می‌آید :

$$S=\frac{lq-a}{q-1}$$

$$S=a\frac{q^n-1}{q-1}$$

۱۱ـ اگر در یك تصاعد هندسی قدر مطلق q (قدر نسبت) کوچکتر از واحد و n عدهٔ جمل ، بی‌اندازه بزرگ گرفته شود ، مجموع جمل دارای حدی است برابر:

$$S=\frac{a}{1-q}$$

۱۲ـ عدد اعشاری متناوب ، عددی‌است اعشاری که عدهٔ ارقامش نامحدود باشد ، اما تشکیل شده باشد ازچند رقم‌که به ترتیب معین تکرار شده باشند . هرعدداعشاری‌که دوره‌اش بلافاصله پس‌از ممیز شروع شود ، اعشاری متناوب ساده نامیده می‌شود واگر دوره‌اش بلافاصله پس‌ازممیز شروع نشود ، آن را عدد اعشاری متناوب مرکب می‌نامند .

۱۳ـ مولد هرعدد اعشاری متناوب (کوچکتراز واحد) ، کسری است متعارفی که صورتش برابر دورهٔ آن و مخرجش عددی که تمام رقمهایش ۹ و شمارهٔ رقمهایش برابر عدهٔ رقمهای دوره باشد .

۱۴ـ مولد هرعدد اعشاری متناوب مرکب (کوچکترازواحد) ، کسری است متعارفی که صورتش عددی است صحیح که برابر باقیماندهٔ تفریق جزء ثابت ، از عددی که تشکیل شده باشد از جزء ثابت و یك دوره ، و مخرجش عددی است صحیح که تشکیل شده باشد از چند ۹ وبه دنبال آن چند صفرکه عدهٔ ۹ها برابرعدهٔ ارقام دوره و عدهٔ صفرها برابرعدهٔ ارقام ثابت باشد .

خود را امتحان کنید :

۱ـ تصاعد حسابی را تعریف‌کنید. قدرنسبت درتصاعد حسابی چیست ؟

۲ـ آیا درتصاعد حسابی ممکن‌است‌که قدرنسبت عدد منفی باشد ؟

۳ـ اگراعداد a ، b ، c ، d ، e جمل متوالی تصاعد حسابی باشند، آیا اعداد e ، d ، c ، b ، a نیز جمل یك تصاعد حسابی خواهند بود ؟ قدرنسبتهای این دوتصاعد نسبت به هم چگونه‌اند ؟

۴ـ آیا اعداد زوج متوالی تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند ؟ قدرنسبت این تصاعد چه عددی است ؟

۵ـ تصاعد هندسی چیست ، جملهٔ nام‌آن ازکدام دستور بدست می‌آید؟

۶ـ اگراعداد P،N،M وG جمل متوالی یك تصاعد هندسی باشند ، آیا اعداد G،M،N وP جمل متوالی یك تصاعد هندسی خواهند بود ؟ قدرنسبتهای این دوتصاعد نسبت به هم چگونه‌اند ؟

۷ـ درچه صورت می‌توانیم مجموع بینهایت جملهٔ یك تصاعد هندسی را حساب‌کنیم ؟ دستورآن کدام است ؟

۸ـ کسراعشاری متناوب یعنی‌چه؟ اعداد اعشاری متناوب مرکب‌کدامند؟

۹ـ کسر مولد عدد اعشاری ساده یا مرکب کدام است ؟ چگونه آن را بدست می‌آورند ؟

۱۰ـ چند عدد مساوی تشکیل چه‌نوع تصاعدی می‌دهند؟ قدر نسبت آن تصاعد چیست ؟

۱۱ـ اعدادی که قدرمطلق آنها باهم برابر و علامتهایشان یك درمیان +و− باشند ، چگونه تصاعدی تشکیل می‌دهند ؟ قدرنسبت‌آن چیست ؟

فصل سوم

ربح مرکب ـ قسط‌السنین

الف ـ ربح مرکب

تعریف ـ در مرابحه، هرگاه سود را درآخرسال یا درآخر هرشش ماه (یا درآخر هر زمان‌ثابت‌معین) بر سرمایه بیفزایند ومجموع اصل‌وفرع را سرمایه‌ای‌برای سال بعدیا برای شش‌ماه‌بعد (یازمان‌ثابت‌بعد) قراردهند، می‌گوییم‌که سرمایهٔ مذکور به **ربح مرکب** گذاشته شده است.

مسئله ـ به فرض آنکه سرمایهٔ a ریال از قرار نرخ $i\%$ به مرابحهٔ مرکب گذاشته شده، مطلوب است تعیین اصل و فرع پس از n سال:

بنابه فرض سود ۱۰۰ریال دریك سال i ریال است؛ پس سود یك ریال دریك سال $\frac{i}{100}$ ریال خواهد بود که آن را به r نمایش می‌دهیم؛ از این رو سود a ریال در یك سال برابر ar ریال و اصل و فرع آن پس از مدت یك سال $a+ar$ ریال یا $a(1+r)$ ریال می‌شود؛ یعنی اصل و فرع هر سرمایه پس از مدت یك سال مساوی حاصل ضرب آن سرمایه در $(1+r)$ است؛ بنابراین اصل و فرع سرمایهٔ a ریال یعنی $a(1+r)$ ریال (که سرمایهٔ جدیدی برای سال دوم محسوب می‌شود)،

بعد از انقضای سال دوم $a(1+r)(1+r)$ یا $a(1+r)^2$ ریال خواهد بودکه سرمایهٔ جدیدی برای سال سوم است؛ اصل وفرع آن بعد از یك سال (انتهای سال سوم)، $a(1+r)^3$ ریال و بالاخره اصل و فرع سرمایهٔ a ریال‌پس‌از مدت n سال برابراست با $a(1+r)^n$ ریال. اگر اصل‌وفرع را پس‌از n سال با A نمایش دهیم، دستور زیر بدست می‌آید:

$$A=a(1+r)^n \qquad (1)$$

مثال ـ صندوق پس‌انداز ملی برای اندوخته‌های کمتراز ۵۰۰۰ ریال ۴% سود می‌دهد و این سودرا در آخر اسفند هرسال براندوختهٔ پیش می‌افزاید. اگر در روز اول فروردین ۱۳۴۰ دوهزار ریال به‌این صندوق سپرده باشیم، درآخرسال ۱۳۴۵چه اندوخته‌ای خواهیم داشت؟

دراین مسئله $a=2000$، $r=0/04$، $n=6$ و A مجهول است.

برای بدست‌آوردن A از روی دستور(شمارهٔ ۱) چنین عمل می‌کنیم:

$$A=a(1+r)^n=2000\times(1/04)^6$$
$$\log A=\log 2000+6\log 1/04$$
$$=3/3010+6\times 0/0170=3/4030$$

عدد مابازای ۳/۴۰۳۰ می‌شود:

$$A=2529$$ ریال

دقت کنید! دستور ۱ مربوط است به مرابحه‌ای‌که درآن سود را در آخرهرسال به‌سرمایه بیفزایند.

اما اگر در یك مرابحه سود را درآخرهرشش ماه به سرمایه بیفزایند، با استدلالی کاملاً شبیه به استدلالی‌که برای یافتن دستور(۱)

بکار بردیم خواهیم دیدکه می‌توان عیناً درآن مورد نیز دستور ۱ را بکار برد به شرط آنکه n را عدهٔ «۶ ماه»ها و r را برابرسود یك ریال در شش ماه یعنی $\frac{i}{200}$ گرفت .

بازهم دقت کنید! درحالتی که سود را در آخر هر سال به سرمایه بیفزایند ، اگر مدت مرابحهٔ مرکب شامل کسری از سال نیز باشد، مثلاً ۶ سال و۷ ماه ، عمل درست آن است که ابتدا اصل و فرع سرمایهٔ a را درمدت ۶ سال حساب کنیم و بعد سود این اصل وفرع را (به مرابحهٔ ساده) درمدت ۷ ماه ، بر آن بیفزاییم . پس اگر بطورکلی مدت n سال و m ماه باشد ، اصل وفرع پس‌از n سال عبارت است از $a(1+r)^n$ ریال‌که سود $a(1+r)^n$ ریال در m ماه ($\frac{m}{12}$ سال) می‌شود :

$$a(1+r)^n \times r \times \frac{m}{12}$$

ومجموع اصل وفرع پس‌از n سال و m ماه می‌شود :

$$A=a(1+r)^n\left(1+\frac{m\cdot r}{12}\right)$$

محاسبهٔ اصل وفرع در حالتی‌که سود درآخر هر۶ ماه به سرمایه افزوده شود ومدت شامل کسری از ۶ ماه باشد ، مانند حالت فوق است. اما در بانکها به این طریق حساب نمی‌کنند و برای سهولت مثلاً اگر مدت ۶ سال وهفت ماه باشد، n را برابر $6\frac{7}{12}$ یعنی $\frac{79}{12}$ می‌گیرند ؛ یعنی خواه n درست باشد وخواه‌کسری ، همان دستور ۱ را بکار می‌برند.

۳ ـ ازروی دستور ۱ می‌توان یکی‌ازچهار مقدار a ، A ، n ، r را با معلوم بودن سه‌تای‌آنها حساب‌کرد . برای این‌کار ، ازطرفین‌دستور (۱) لگاریتم می‌گیریم وآن را چنین می‌نویسیم :

$$\log A=\log a+n\cdot\log(1+r) \qquad (2)$$

مثال۱ ـ سود و سرمایهٔ ۳۰۰۰ ریال پس از چه مدت از قرار ۵٪ به ربح مرکب برابر ۵۰۰۰ ریال می‌شود ؟

ازروی دستور(۲) داریم : $n=\frac{\log A+\text{colog}\,a}{\log(1+r)}$

پس دراین مسئله :

$$n=\frac{\log 5000+\text{colog}\,3000}{\log 1.05}=\frac{0.2219}{0.0212}=\frac{2219}{212}\ \text{سال}$$

وازآنجا : $n=10$ سال ۵ ماه ۱۸ روز

مثال۲ ـ با چه نرخی باید ۱۵۰۰۰ ریال را در مدت ۵ سال به مرابحهٔ مرکب‌گذاشت تا اصل وفرع آن ۲۵۰۰۰ ریال شود ؟

از روی دستور (۲) داریم :

$$\log(1+r)=\frac{1}{n}(\log A+\text{colog}\,a)$$

ازروی این رابطه ابتدا $\log(1+r)$، بعد $1+r$ و سپس i (نرخ) راچنین بدست می‌آوریم :

$$\log(1+r)=\frac{1}{5}(\log 25000+\text{colog}\,15000)=0.0444$$

$$1+r=1.108$$
$$r=0.108$$
$$i=10.8$$

بکار بردیم خواهیم دیدکه می‌توان عیناً درآن مورد نیز دستور ۱ را بکار برد به شرط آنکه n را عدهٔ «۶ ماه»ها و r را برابرسود یك ریال در شش ماه یعنی $\frac{i}{200}$ گرفت .

بازهم دقت‌کنید! درحالتی که سود را در آخر هر سال به سرمایه بیفزایند ، اگر مدت مرابحهٔ مرکب شامل کسری از سال نیز باشد، مثلاً ۶ سال و۷ ماه ، عمل درست آن است‌که ابتدا اصل و فرع سرمایهٔ a را درمدت ۶ سال حساب‌کنیم و بعد سود این اصل وفرع را (به مرابحهٔ ساده) درمدت ۷ ماه ، بر آن بیفزاییم . پس اگر بطورکلی مدت n سال و m ماه باشد ، اصل وفرع پس‌از n سال عبارت است از $a(1+r)^n$ ریال‌که سود $a(1+r)^n$ ریال در m ماه ($\frac{m}{12}$ سال) می‌شود :

$$a(1+r)^n \times r \times \frac{m}{12}$$

ومجموع اصل وفرع پس‌از n سال و m ماه می‌شود :

$$A = a(1+r)^n\left(1+\frac{m\cdot r}{12}\right)$$

محاسبهٔ اصل وفرع در حالتی‌که سود درآخر هر۶ ماه به سرمایه افزوده شود ومدت شامل کسری از ۶ ماه باشد ، مانند حالت فوق است. اما در بانکها به این طریق حساب نمی‌کنند و برای سهولت مثلاً اگر مدت ۶ سال وهفت ماه باشد، n را برابر $6\frac{7}{12}$ یعنی $\frac{79}{12}$ می‌گیرند ؛ یعنی خواه n درست باشد وخواه‌کسری ، همان دستور ۱ را بکار می‌برند.

۳ ـ ازروی دستور ۱ می‌توان یکی‌ازچهار مقدار a ، A ، n ، r را با معلوم بودن سه‌تای‌آنها حساب‌کرد . برای این‌کار ، ازطرفین‌دستور (۱) لگاریتم می‌گیریم وآن را چنین می‌نویسیم :

$$\log A = \log a + n\cdot\log(1+r) \qquad (2)$$

مثال۱ ـ سود و سرمایهٔ ۳۰۰۰ ریال پس از چه مدت از قرار ۵٪ به ربح مرکب برابر ۵۰۰۰ ریال می‌شود ؟

ازروی دستور(۲) داریم : $n=\frac{\log A+\text{colog}\,a}{\log(1+r)}$

پس دراین مسئله :

$$n=\frac{\log 5000+\text{colog}\,3000}{\log 1/05}=\frac{0/2219}{0/0212}=\frac{2219}{212}$$ سال

وازآنجا :

	سال	ماه	روز
	$n=10$	5	18

مثال۲ ـ با چه نرخی باید ۱۵۰۰۰ ریال را در مدت ۵ سال به مرابحهٔ مرکب‌گذاشت تا اصل وفرع آن ۲۵۰۰۰ ریال شود ؟

از روی دستور (۲) داریم :

$$\log(1+r)=\frac{1}{n}(\log A+\text{colog}\,a)$$

ازروی این رابطه ابتدا $\log(1+r)$، بعد $1+r$ و سپس i (نرخ) راچنین بدست می‌آوریم :

$$\log(1+r)=\frac{1}{5}(\log 25000+\text{colog}\,15000)=0/0444$$

$$1+r=1/108$$
$$r=0/108$$
$$i=10/8$$

نما	۱/۰۳	۱/۰۴	۱/۰۴۵	۱/۰۵	۱/۰۶
۱	۱/۰۳	۱/۰۴	۱/۰۴۵	۱/۰۵	۱/۰۶
۲	۱/۰۶۰۹۰۰	۱/۰۸۱۶۰۰	۱/۰۹۲۰۲۵	۱/۱۰۲۵۰۰	۱/۱۲۳۶۰۰
۳	۱/۰۹۲۷۲۷	۱/۱۲۴۸۶۴	۱/۱۴۱۱۶۶	۱/۱۵۷۶۲۵	۱/۱۹۱۰۱۶
۴	۱/۱۲۵۵۰۹	۱/۱۶۹۸۵۹	۱/۱۹۲۵۱۹	۱/۲۱۵۵۰۶	۱/۲۶۲۴۷۷
۵	۱/۱۵۹۲۷۴	۱/۲۱۶۶۵۳	۱/۲۴۶۱۸۲	۱/۲۷۶۲۸۲	۱/۳۳۸۲۲۶
۶	۱/۱۹۴۰۵۲	۱/۲۶۵۳۱۹	۱/۳۰۲۲۶۰	۱/۳۴۰۰۹۶	۱/۴۱۸۵۱۹
۷	۱/۲۲۹۸۷۴	۱/۳۱۵۹۳۲	۱/۳۶۰۸۶۲	۱/۴۰۷۱۰۰	۱/۵۰۳۶۳۰
۸	۱/۲۶۶۷۷۰	۱/۳۶۸۵۶۹	۱/۴۲۲۱۰۱	۱/۴۷۷۴۴۵	۱/۵۹۳۸۴۸
۹	۱/۳۰۴۷۷۳	۱/۴۲۳۳۱۲	۱/۴۸۶۰۹۵	۱/۵۵۱۳۲۸	۱/۶۸۹۴۷۹
۱۰	۱/۳۴۳۹۱۶	۱/۴۸۰۲۴۴	۱/۵۵۲۹۶۹	۱/۶۲۸۸۹۵	۱/۷۹۰۸۴۸
۱۱	۱/۳۸۴۲۳۴	۱/۵۳۹۴۵۴	۱/۶۲۲۸۵۳	۱/۷۱۰۳۳۹	۱/۸۹۸۲۹۹
۱۲	۱/۴۲۵۷۶۱	۱/۶۰۱۰۳۲	۱/۶۹۵۸۸۱	۱/۷۹۵۸۵۶	۲/۰۱۲۱۹۶
۱۳	۱/۴۶۸۵۳۴	۱/۶۶۵۰۷۴	۱/۷۷۲۱۹۶	۱/۸۸۵۶۴۹	۲/۱۳۲۹۲۸
۱۴	۱/۵۱۲۵۹۰	۱/۷۳۱۶۷۶	۱/۸۵۱۹۴۵	۱/۹۷۹۹۳۲	۲/۲۶۰۲۰۴
۱۵	۱/۵۵۷۹۶۷	۱/۸۰۰۹۴۴	۱/۹۳۵۲۸۲	۲/۰۷۸۹۲۸	۲/۳۹۶۵۵۸
۱۶	۱/۶۰۴۷۰	۱/۸۷۲۹۸۱	۲/۰۲۲۳۷۰	۲/۱۸۲۸۷۵	۲/۵۴۰۳۵۲
۱۷	۱/۶۵۲۸۴۸	۱/۹۴۷۹۰۰	۲/۱۱۳۳۷۷	۲/۲۹۲۰۱۸	۲/۶۹۲۷۷۳
۱۸	۱/۷۰۲۴۳۳	۲/۰۲۵۸۱۸	۲/۲۰۸۴۷۹	۲/۴۰۶۶۱۹	۲/۸۵۴۳۳۹
۱۹	۱/۷۵۳۵۰۶	۲/۱۰۶۸۴۹	۲/۳۰۷۸۶۰	۲/۵۲۶۹۵۰	۳/۰۲۵۶۰۰
۲۰	۱/۸۰۶۱۱۱	۲/۱۹۱۱۲۳	۲/۴۱۱۷۱۴	۲/۶۵۳۲۹۸	۳/۲۰۷۱۳۵
۲۱	۱/۸۶۰۲۹۵	۲/۲۷۸۷۶۸	۲/۵۲۰۲۴۱	۲/۷۸۵۹۶۳	۳/۳۹۹۵۶۴
۲۲	۱/۹۱۶۱۰۳	۲/۳۶۹۹۱۹	۲/۶۳۳۶۵۲	۲/۹۲۵۲۶۱	۳/۶۰۳۵۳۷
۲۳	۱/۹۷۳۵۸۷	۲/۴۶۴۷۱۶	۲/۷۵۲۱۶۶	۳/۰۷۱۵۲۴	۳/۸۱۹۷۵۰
۲۴	۲/۰۳۲۷۹۴	۲/۵۶۳۳۰۴	۲/۸۷۶۰۱۴	۳/۲۲۵۱۰۰	۴/۰۴۸۹۳۵
۲۵	۲/۰۹۳۷۷۸	۲/۶۶۵۸۳۶	۳/۰۰۵۴۳۴	۳/۳۸۶۳۵۵	۴/۲۹۱۸۷۱
۳۰	۲/۴۲۷۲۶۲	۳/۲۴۳۳۹۸	۳/۷۴۵۳۱۸	۴/۳۲۱۹۴۲	۵/۷۴۳۴۹۱
۳۵	۲/۸۱۳۸۶۲	۳/۹۴۶۰۸۹	۴/۶۶۷۳۴۸	۵/۵۱۶۰۱۵	۷/۶۸۶۰۸۷
۴۰	۳/۲۶۲۰۳۸	۴/۸۰۱۰۲۱	۵/۸۱۶۳۶۵	۷/۰۳۹۹۸۹	۱۰/۲۸۵۷۱۸
۴۵	۳/۷۸۱۵۹۶	۵/۸۴۱۱۷۶	۷/۲۴۸۲۴۸	۸/۹۸۵۰۰۸	۱۳/۷۶۴۶۱۱
۵۰	۴/۳۸۳۹۰۶	۷/۱۰۶۶۸۳	۹/۰۳۲۶۳۶	۱۱/۴۶۷۴۰۰	۱۸/۴۲۰۱۵۴

ب ـ قسط‌السنین

۴ـ تعریف ـ قسط‌السنین مبلغی است ثابت که درهرسال یك بار یا هرشش‌ماه یا هریك‌ماه یك‌بار تا مدتی معین به مرابحهٔ مرکب می‌پردازند و این عمل را برای **تشکیل سرمایه** یا برای **استهلاك دین** انجام می‌دهند (واضح است‌که برای تشکیل سرمایه درابتدای هرسال این‌مبلغ ثابت پرداخت می‌شود و برای استهلاك دین آخرهرسال) .

اولاً ـ قسط‌السنین برای تشکیل‌سرمایه

۵ـ مسئله ـ شخصی درابتدای هرسال مبلغی ثابت را (a ریال) ازقرار $i\%$ به مرابحهٔ مرکب می‌گذارد ؛ معین‌کنید درآخرسال nام از اصل وفرع آن چه سرمایه (C)ای برای او تشکیل می‌شود ؟

حل ـ اصل وفرع اقساط a ریال درمدتی‌که هریك از این اقساط به مرابحهٔ مرکب می‌ماند ، ازاین قراراست :

اصل و فرع قسط اول درآخرسال n ام (یعنی پس از n سال)

$$a(۱+r)^{n}$$

اصل وفرع قسط دوم تا آخرسال $n-۱$ ام (یعنی پس‌از $n-۱$ سال)

$$a(۱+r)^{n-۱}$$

. . . .

. . . .

اصل وفرع قسط n ام درآخرسال n ام (یعنی پس‌از یك سال)

$$a(۱+r)$$

C مجموع همهٔ این اصل و فرعها ، سرمایه‌ای است که پس از

n سال برای آن شخص فراهم می‌گردد :

$$C=a(۱+r)^{n}+a(۱+r)^{n-۱}+\cdots\cdots+a(۱+r)$$

می‌بینیم C مجموع n جملهٔ یك تصاعد هندسی است که جملهٔ اولش $a(۱+r)$ وقدرنسبت آن $(۱+r)$ باشد ؛ پس :

$$C=a(۱+r)\frac{(۱+r)^{n}-۱}{r} \qquad (۱)$$

توجه‌کنید! برای محاسبهٔ C یا a یا n به‌کمك لگاریتم ، ابتدا باید مقدار $(۱+r)^{n}-۱$ را حساب‌کرد .

مثال ۱ ـ شخصی درابتدای هر سال مبلغ ۵۰۰ ریال را از قرار نرخ ۳٪ به مرابحهٔ مرکب می‌گذارد ؛ می‌خواهیم سرمایهٔ او را پس‌از انقضای ۲۵ سال حساب‌کنیم .

در اینجا $a=۵۰۰$ ، $r=\frac{۳}{۱۰۰}$ ، $n=۲۵$ و C مجهول است .

ابتدا عبارت $(۱/۰۳)^{۲۵}-۱$ را به ترتیب زیرحساب می‌کنیم :

$$\log(۱/۰۳)^{۲۵}=۲۵\log ۱/۰۳=۲۵(۰/۰۱۲۸)=۰/۳۲۰۰$$

بنابراین : $(۱/۰۳)^{۲۵}=۲/۰۹$

پس : $(۱/۰۳)^{۲۵}-۱=۱/۰۹$

حالا اگراز طرفین دستور(۱) لگاریتم بگیریم ، خواهیم داشت :

$$\log C=\log ۵۰۰+\log ۱/۰۳+\log ۱/۰۹+\operatorname{colog} ۰/۰۳$$
$$\log C=۲/۶۹۹۰+۰/۰۱۲۸+۰/۰۳۷۴+۱/۵۲۲۹$$
$$\log C=۴/۲۷۲۱$$

جواب $C=۱۸۷۱۰$

مثال۲ ـ شخصی که ۲۱ سال دارد ، می‌خواهد با پرداخت اقساط سالانه ، در موقع رسیدن به سن ۶۰ سالگی ، صاحب سرمایه‌ای برابر ۳۰۰۰۰ ریال شود ؛ اگر نرخ مرابحه ۳/۵٪ باشد ، هرسال چه مبلغی باید بپردازد ؟

دراین مثال: $C=۳۰۰۰۰$ ، $r=۰/۰۳۵$ ، $n=۶۰-۲۱=۳۹$ و a مجهول است .

ابتدا عبارت $(۱/۰۳۵)^{۳۹}-۱$ را حساب می‌کنیم که می‌شود ۲/۸۲۵ بنابراین :

$$\log a=\log ۳۰۰۰۰+\log ۰/۰۳۵+\operatorname{colog} ۱/۰۳۵+\operatorname{colog} ۲/۸۲۵$$

که پس از محاسبه ، مقدار a چنین می‌شود : $a=۳۵۹$

ثانیاً ـ قسط‌السنین برای استهلاك دین

۶ـ مسئله ـ شخصی امروز A ریال قرض می‌کند ؛ در آخر هر سال چه مبلغی باید بپردازد تا در انقضای n سال قرضش مستهلك شود به فرض آنکه اقساط و مبلغ A همه به یك نرخ به مرابحهٔ مرکب داده شده باشند ؟

حل ـ اگر قسط سالیانه را a ریال بگیریم ، اصل و فرع هر یك ازاقساط سالانه بترتیب چنین می‌شوند :

اصل و فرع اولین قسط a که در آخر سال اول پرداخت‌می‌شود:

(در $n-۱$ سال) $a(۱+r)^{n-۱}$

اصل‌وفرع دومین قسط a که درآخر سال دوم پرداخت می‌شود :

(در $n-۲$ سال) $a(۱+r)^{n-۲}$

اصل و فرع سومین قسط a که در آخرسال سوم پرداخت‌می‌شود:

(در n − ۳ سال) $a(1+r)^{n-3}$

اصل‌وفرع nامین قسط a که در آخرسال nام پرداخت می‌شود :

(در n − n سال) $a(1+r)^{n-n}=a$

مجموع این مقادیر ، یعنی :

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\dots\dots+a=a\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

باید برابر قرض شخص پس از مدت n سال یعنی مساوی $A(1+r)^n$ باشد ؛ پس :

$$A(1+r)^n=a\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \qquad (1)$$

دقت کنید ! برای محاسبهٔ A ، یا a ، ابتدا $(1+r)^n$ را به‌وسیلهٔ لگاریتم و ازآنجا $(1+r)^n-1$ را حساب می‌کنیم . برای محاسبهٔ n از روی دستور (۱) ابتدا مقدار $(1+r)^n$ را حساب می‌کنیم و سپس n را به‌کمك لگاریتم بدست می‌آوریم .

مثال - شرکتی مبلغ ۱۸۰۰۰۰۰ ریال ازقرار ۴٪ به ربح مرکب قرض نموده است ؛ چه قسطی هرسال باید بپردازد تا پس از ۳۰ سال قرضش مستهلك شود ؟

در اینجا $A=1800000$ ، $r=0/04$ ، $n=30$ و a مجهول است .

ابتدا $(1/04)^{30}-1$ را حساب می‌کنیم که می‌شود ۲/۲۴۳ و به کمك لگاریتم از دستور (۱) خواهیم داشت :

$\log a=\log 72000+30\log 1/04+\operatorname{colog} 2/243$ که پس از محاسبه می‌شود : $a=104088$

تمرین

۱- ۲۲۰۰۰ ریال از قرار ۴٪ به مدت ۵ سال به ربح مرکب داده شده است. اصل وفرع آن را حساب‌کنید .

۲- چه سرمایه‌ای ازقرار نرخ ۵٪ بعداز ده سال اصل‌وفرعش به ربح مرکب ۱۲۰۰۰۰ ریال خواهد شد ؟

۳- به چه نرخی ۱۰۰۰ریال پس‌از ده سال به ربح مرکب ، ۲۰۰۰ ریال می‌شود ؟

۴- چه سرمایه‌ای درمدت ۲۰سال ازقرار نرخ ۵٪ به ربح مرکب ، ۲۰۰۰۰ریال می‌شود ؟

۵- درچه مدت یك‌سرمایه‌راکه‌بانرخ ۴٪ به مرابحهٔ مرکب‌گذاشته‌ایم، دوبرابر می‌شود ؟

۶- مطلوب است محاسبهٔ اصل و فرع مبلغ ۱۵۰۰۰ ریال از قرار ۴/۵٪ به ربح مرکب پس‌از مدت ۱۲سال. پس‌از تعیین اصل وفرع ، برای امتحان درستی‌عمل، سرمایه ومدت ونرخ رایکی پس‌ازدیگری مجهول اختیار کنید ومسئله را حل‌کنید.

۷- مبلغ ۳۵۵۰۰ ریال ازقرار نرخ ۶٪ ده سال به مرابحهٔ مرکب گذارده شده است ؛ معلوم‌کنید همان سرمایه با همان نرخ چند سال باید به مرابحهٔ ساده‌گذاشته شود تاهمان اصل‌وفرع عاید شود .

۸- پس از چه مدتی سرمایهٔ a ازقرار i٪ اصل و فرعش $a \cdot n$ می‌شود ؟

۹- درچه مدتی سرمایه‌ای از قرار ۵٪ به ربح مرکب گذاشته شود تا نفعش برابر نصف سرمایه شود ؟

۱۰- چه سرمایه‌ای است که پس‌از مدت ۱۸سال از قرار نرخ ۴٪ اصل وفرعش ۲۰۰۰۰ریال می‌شود ؟ درصورتی‌که واحد زمان ۶ماه باشد.

۱۱- شخصی مبلغ ۵۲۷۲۵ ریال به ربح مرکب می‌گذارد ؛ اگرمدت مرابحه دوسال‌کمتر باشد، اصل وفرع مبلغ مزبور ۴۴۲۲/۱۵ریال‌کم می‌شود واگر مدت دوسال بیشتر باشد ، براصل وفرع ۴۷۸۳ ریال اضافه می‌شود ؛ مطلوب است نرخ ومدت مرابحه.

۱۲- اگر شخصی ده سال متوالی در اول هرسال ۲۵۰۰ریال از قرار ۵٪ به ربح مرکب بدهد و از اول سال یازدهم تا ۴سال ، سالی ۵۰۰۰ ریال پس بگیرد،چه‌مبلغ طلبکارخواهدبود؟ (یك‌سال پس‌ازدریافت‌آخرین‌قسط)

۱۳- بازرگانی ۶۷۲۸۰ ریال در اول فروردین ۱۳۴۱وام‌گرفته و با دو قسط ۳۹۸۹۶ ریال یکی در اول فروردین ۱۳۴۲ و دیگری در اول فروردین ۱۳۴۳، آن را می‌پردازد ؛ حساب‌کنید نرخ وام را.

۱۴- ۸۰۰۰۰ ریال را برای مدتی به ربح مرکب داده‌ایم ؛ اگر یك سال زودتراز سررسید بخواهیم بگیریم ، ۴۴۱۰ ریال‌کمتر بدست خواهدآمد ولی‌اگر یك‌سال بیشتردرمرابحه‌بماند، ۴۶۳۰/۵ ریال بیشتر خواهیم‌گرفت؛ حساب‌کنید نرخ ومدت را ؟

۱۵- دونفر باهم ۶۰۰۰۰ریال را به‌یك‌نرخ به ربح مرکب داده‌اند؛ بعداز دوسال اولی ۴۳۲۶۴ ریال ودومی ۲۱۶۳۲ریال‌گرفت؛ نرخ مرابحه وسرمایهٔ هریك را معین‌کنید .

۱۶- شخصی a ریال به ربح مرکب قرض و به اقساط سالانهٔ b ریال پس‌از دوسال قرضش را مستهلك‌کرد ؛ مطلوب است نرخ مرابحه .

۱۷- شخصی ۲۰۰۰۰ریال به ربح مرکب ۲۲ساله از قرار ۵٪ قرض نمود؛ پس‌از پرداخت چهارقسط متساوی می‌خواهد قرضش رایکباره بپردازد؛ چقدر باید بدهد؟

۱۸- شخصی a ریال به ربح مرکب ازقرار ۵٪ قرض‌کرد ؛ چه‌قسطی سالانه بپردازد تا پس‌ازمدت ۵ سال قرضش $\frac{a}{2}$ شود .

۱۹- شخصی ۳۳۶۴۰ ریال به ربح مرکب قرض کرد و پس از چهار

سال با پرداخت دو قسط متساوی ۱۹۴۴۸ ریال در پایان هر دو سال قرضش را مستهلك می‌کند . مطلوب است نرخ معامله .

۲۰ - شخصی در ابتدای هر سال ۳۰۰۰ ریال از قرار نرخ ۳٪ به مرابحهٔ مرکب می‌گذارد ویك سال بعد ازپرداخت آخرین قسط هر سال مبلغ ۶۰۰ ریال از ذخیره‌اش برمی‌دارد تا پس از ۱۰ سال ذخیره‌اش تمام می‌شود. معین‌کنید چند قسط پرداخته است ؟

۲۱ - شخصی ۷۵۰۰ ریال به ربح مرکب از قرار نرخ ۴/۵٪قرض نموده ومی‌خواهد در پایان هر دوسال به وسیلهٔ پرداخت اقساط متساوی ۷۵۰ ریالی آن را مستهلك‌کند . پس ازچه مدت قرضش تمام می‌شود ؟

۲۲ - اگر شخصی یك ریال از قرار نرخ ۳٪ به مرابحهٔ مرکب بگذارد ، پس ازمدت ۵۰۰ سال چه‌مقدار عایدبازماندگانش خواهد شد ؟

۲۳ - شخصی ازابتدای ۱۶ سالگی معتاد به‌کشیدن سیگارشد . حساب کردکه هرروز بطور متوسط ۵/۵۰ ریال به مصرف این سم می‌رساند . معلوم کنید اگرمخارج سیگار سالانه را هرساله ازقرار نرخ ۴٪ به مرابحهٔ مرکب می‌گذاشت در ۴۵ سالگی صاحب چه سرمایه‌ای می‌شد (سال را ۳۶۰ روز حساب‌کنید) ؟

۲۴ - شخصی ۱۲۰۰۰۰ ریال از قرار نرخ ۴٪ به مرابحهٔ مرکب می‌گذارد . دو سال بعد ۱۱۰۰۰۰ ریال از قرار نرخ مجهولی ، ۵ ساله قرض می‌کند ، پس از اختتام ۵ سال معلوم می‌شودکه تمام قرضش با اصل و فرع طلبش مساوی شد . مطلوب است نرخ مبلغی‌که قرض‌کرده است ؟

۲۵ - شخصی ۵۰۰۰۰۰ ریال‌سرمایهٔ خود را بین سه اولادش‌که به سن ۵ سال ، ۷ سال و ۱۰ سال بودند بدین قسم تقسیم کرد که اگر سهم هر یك را از قرار نرخ ۵٪ به مرابحهٔ مرکب‌گذارد ، در موقع رسیدن به سن ۲۵ سالگی اصل‌وفرع طلبش مساوی باشد . سهم هریك ازاولادها را معین‌کنید .

۲۶ - شخصی‌برای تشکیل‌سرمایه تا مدت ۲۰ سال هرساله‌مبلغ‌ده‌هزار ریال می‌پردازد . معین‌کنید پس از ۲۰ سال هرسال چه مبلغ دریافت دارد تا پس ازانقضای ۴۰ سال ذخیره‌اش تمام شود . نرخ معامله ۴٪ است .

۲۷ - شخصی برای تشکیل سرمایه در ابتدای سال اول مبلغ a ریال و در ابتدای سال دوم مبلغ $a \cdot q$ ریال ودرابتدای سال سوم $a \cdot q^2$ ریال

و به همین طریق تا مدت n سال می‌پردازد . مطلوب است اصل و فرع سرمایهٔ حاصل درصورتی‌که نرخ مرابحه صدی ۴ باشد .

$n=۱۰$ ، $q=۲$ ، $a=۱۰۰۰$

۲۸ – جمعیت کشوری ۲۰ میلیون نفر است . اگر هرسال ۲ درصد به جمعیت اضافه شود پس از ۴۰ سال جمعیت کشورچقدرمی‌شود ؟

۲۹ – جمعیت کشوری ۲۰ میلیون نفراست . هر سال ۱۷ درصد متولد می‌شوند و ۱۴ درصد می‌میرند . پس از چند سال جمعیت کشور دو برابر می‌شود ؟

۳۰ – شخصی اول هرسال ۳۰۰۰ ریال به حساب پس‌اندازفرزندخود می‌گذارد . معین کنید پس ازده سال بانك چه مبلغ به او می‌پردازد. (صندوق پس‌انداز ملی تا ۲۰۰۰۰ ریال از قرار ۴٪ و از ۲۰۰۰۱ تا ۵۰۰۰۰ ریال را ۲٪ نسبت به مازاد و از ۵۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ ریال را ۱٪ نسبت به مازاد سود می‌دهد).

خلاصهٔ مطالب مهم

۱ – اگر در مرابحه ، سود را درآخر هرسال یا در آخر هر زمان ثابت به سرمایه بیفزایند ومجموع اصل و فرع را سرمایه برای سال بعد قرار دهند، می‌گویندکه سرمایهٔ مذکور به ربح مرکب گذاشته شده است .

۲ – اگر a ریال از قرار i ٪ به مرابحهٔ مرکب‌گذاشته شود اصل و فرع آن پس ازمدت n سال طبق دستورزیر بدست می‌آید :

$A=a(۱+r)^n$. سود یك ریال دریك سال است $r=\frac{i}{۱۰۰}$

۳ – اگرکسی هرسال (یا هر زمان ثابت) یك بار تامدت معینی مبلغی به ربح مرکب بپردازد ، این عمل را اگربرای تشکیل سرمایه باشد قسط‌السنین به منظور تشکیل سرمایه و اگربرای استهلاك دین باشد . قسط‌السنین به منظور استهلاك دین می‌نامند .

۴ – قسطها اگر برای تشکیل سرمایه باشد در ابتدای هر سال و اگر برای استهلاك دین باشد درآخرهرسال پرداخت می‌شود .

شمار	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰۰	۰۰۰۰۰	۰۴۳	۰۸۷	۱۳۰	۱۷۳	۲۱۷	۲۶۰	۳۰۳	۳۴۶	۳۸۹
۱	۴۳۲	۴۷۵	۵۱۸	۵۶۱	۶۰۴	۶۴۷	۶۸۹	۷۳۲	۷۷۵	۸۱۷
۲	۸۶۰	۹۰۳	۹۴۵	۹۸۸	°۰۳۰	°۰۷۲	°۱۱۵	°۱۵۷	°۱۹۹	°۲۴۲
۳	۰۱۲۸۴	۳۲۶	۳۶۸	۴۱۰	۴۵۲	۴۹۴	۵۳۶	۵۷۸	۶۲۰	۶۶۲
۴	۷۰۳	۷۴۵	۷۸۷	۸۲۸	۸۷۰	۹۱۲	۹۵۳	۹۹۵	°۰۳۶	°۰۷۸
۵	۰۲۱۱۹	۱۶۰	۲۰۲	۲۴۳	۲۸۴	۳۲۵	۳۶۶	۴۰۷	۴۴۹	۴۹۰
۶	۵۳۱	۵۷۲	۶۱۲	۶۵۳	۶۹۴	۷۳۵	۷۷۶	۸۱۶	۸۵۷	۸۹۸
۷	۹۳۸	۹۷۹	°۰۱۹	°۰۶۰	°۱۰۰	°۱۴۱	°۱۸۱	°۲۲۲	°۲۶۲	°۳۰۲
۸	۰۳۳۴۲	۳۸۳	۴۲۳	۴۶۳	۵۰۳	۵۴۳	۵۸۳	۶۲۳	۶۶۳	۷۰۳
۹	۷۴۳	۷۸۲	۸۲۲	۸۶۲	۹۰۲	۹۴۱	۹۸۱	°۰۲۱	°۰۶۰	°۱۰۰
۱۱۰	۰۴۱۳۹	۱۷۹	۲۱۸	۲۵۸	۲۹۷	۳۳۶	۳۷۶	۴۱۵	۴۵۴	۴۹۳
۱	۵۳۲	۵۷۱	۶۱۰	۶۵۰	۶۸۹	۷۲۷	۷۶۶	۸۰۵	۸۴۴	۸۸۳
۲	۹۲۲	۹۶۱	۹۹۹	°۰۳۸	°۰۷۷	°۱۱۵	°۱۵۴	°۱۹۲	°۲۳۱	°۲۶۹
۳	۰۵۳۰۸	۳۴۶	۳۸۵	۴۲۳	۴۶۱	۵۰۰	۵۳۸	۵۷۶	۶۱۴	۶۵۲
۴	۶۹۰	۷۲۹	۷۶۷	۸۰۵	۸۴۳	۸۸۱	۹۱۸	۹۵۶	۹۹۴	°۰۳۲
۵	۰۶۰۷۰	۱۰۸	۱۴۵	۱۸۳	۲۲۱	۲۵۸	۲۹۶	۳۳۳	۳۷۱	۴۰۸
۶	۴۴۶	۴۸۳	۵۲۱	۵۵۸	۵۹۵	۶۳۳	۶۷۰	۷۰۷	۷۴۴	۷۸۱
۷	۸۱۹	۸۵۶	۸۹۳	۹۳۰	۹۶۷	°۰۰۳	°۰۴۱	°۰۷۸	°۱۱۵	°۱۵۱
۸	۰۷۱۸۸	۲۲۵	۲۶۲	۲۹۸	۳۳۵	۳۷۲	۴۰۸	۴۴۵	۴۸۲	۵۱۸
۹	۵۵۵	۵۹۱	۶۲۸	۶۶۴	۷۰۰	۷۳۴	۷۷۳	۸۰۹	۸۴۶	۸۸۲
۱۲۰	۹۱۸	۹۵۴	۹۹۰	°۰۲۷	°۰۶۳	°۰۹۹	°۱۳۵	°۱۷۱	°۲۰۷	°۲۴۳
۱	۰۸۲۷۹	۳۱۴	۳۵۰	۳۸۶	۴۲۲	۴۵۸	۴۹۳	۵۲۹	۵۶۵	۶۰۰
۲	۶۳۶	۶۷۲	۷۰۷	۷۴۳	۷۷۸	۸۱۴	۸۴۹	۸۸۴	۹۲۰	۹۵۵
۳	۹۹۱	°۰۲۶	°۰۶۱	°۰۹۶	°۱۳۲	°۱۶۷	°۲۰۲	°۲۳۷	°۲۷۲	°۳۰۷
۴	۰۹۳۴۲	۳۷۷	۴۱۲	۴۴۷	۴۸۲	۵۱۷	۵۵۲	۵۸۷	۶۲۱	۶۵۶
۵	۶۹۱	۷۲۶	۷۶۰	۷۹۵	۸۳۰	۸۶۴	۸۹۹	۹۳۴	۹۶۸	°۰۰۳
۶	۱۰۰۳۷	۰۷۲	۱۰۶	۱۴۰	۱۷۵	۲۰۹	۲۴۳	۲۷۸	۳۱۲	۳۴۶
۷	۳۸۰	۴۱۵	۴۴۹	۴۸۳	۵۱۷	۵۵۱	۵۸۵	۶۱۹	۶۵۳	۶۸۷
۸	۷۲۱	۷۵۵	۷۸۹	۸۲۳	۸۵۷	۸۹۰	۹۲۴	۹۵۸	۹۹۲	°۰۲۵
۹	۱۱۰۵۹	۰۹۳	۱۲۶	۱۶۰	۱۹۳	۲۲۷	۲۶۱	۲۹۴	۳۲۷	۳۶۱

۱۰۰۰″ = ۱۶′ ۴۰″ S = $\bar{۶}$,۶۸۵۵۷ T. ۵۸

۱۱۰۰ = ۱۸ ۲۰ ۵۷ ۵۸

۱۲۰۰ = ۲۰ ۰ ۵۷ ۵۸